გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე
ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი

მათემატიკა

XI კლასი

მასწავლებლის წიგნი

გამომცემლობა **ინტელექტი**
თბილისი

სარჩევი

მე-11 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოს კონცეფცია

მე-11 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელო აგებულია მათემატიკის ახალი სტანდარტის მოთხოვნათა სრული შესაბამისობით. გათვალისწინებულია საშუალო საფეხურზე მათემატიკის სწავლების მიზნები: დაეხმაროს მოსწავლეს გააკეთოს ინფორმირებული და გააზრებული არჩევანი; მოემზადოს უმაღლესი განათლების მისაღებად, ან შრომით ბაზარზე გასასვლელად; განივითაროს XXI საუკუნისთვის საჭირო კომპეტენციები.

მნიშვნელოვანი ყურადღება გავლილი მასალის გამეორებას ეთმობა. ახალი თემების გაცნობაც ცოდნის გამეორებისა და გაღრმავების საშუალებით ხდება. მაგალითად, ფუნქციათა ახალი კლასების (ტრიგონომეტრიული, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული) შესწავლა ძირითადი სამიზნე ცნების — ფუნქციის ცნების შესახებ წარმოდგენების გამეორებასა და გაღრმავებას ეყრდნობა. ყოველ ახალ სამიზნე ცნებასთან დაკავშირებული საკითხები აღიწერება დეტალურად, მოსწავლეთათვის გასაგები ცხოვრებისეულ ვითარებასთან ახლოს მდგომი მაგალითებით.

მაგალითად, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შესწავლა იწყება იმ მოვლენების აღწერით, რომლებიც ბუნებაში პერიოდულად მეორდება, განვიხილავთ პერიოდულობის მაგალითებს ხელოვნებაში, არქიტექტურაში. პერიოდული პროცესების აღწერისას მათემატიკური მეთოდების გამოყენებას მივყავართ პერიოდული ფუნქციების განხილვამდე. პერიოდულობა განხილულია წრეწირზე წერტილის თანაბარი მოძრაობის მაგალითზე და შემოდის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, რომელთა საშუალებით აღიწერება მრავალი პერიოდული პროცესი; მნიშვნელოვანია ამ კონტექსტში ჰარმონიული რხევების განხილვა და შესაბამისი ფუნქციების წარმოდგენა. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების განხილვაც მათი პრაქტიკული გამოყენებების მიხედვით მიმდინარეობს.

ჩვენი შემოქმედებითი თავისუფლება მორგებულია სტანდარტის მოთხოვნებზე, რომლებიც მათემატიკის სწავლა-სწავლების მიზნებთან, მეთოდიკურ ორიენტირებთან და შეფასებასთან არის დაკავშირებული.

სახელმძღვანელოს შინაარსი მე-11 კლასის სტანდარტით დადგენილი სამიზნე ცნებების შესაბამისადაა შერჩეული და ხელს უწყობს საშუალო საფეხურის ძირითადი მიზნების მიღწევას. დავალებები ისეა შერჩეული, რომ მასწავლებელმა მოსწავლეთა მიღწევათა დონის განსაზღვრისას თანამედროვე მეთოდიკური თეორიები გამოიყენოს (მაგალითად, განმავითარებელი შეფასებისას მოსწავლეთა მიღწევების დონეები სოლო ტაქსონომიის გამოყენებით განსაზღვროს).

სახელმძღვანელო განკუთვნილია მოსწავლეთა აკადემიური მზაობის ყველა დონისთვის. ბევრია მარტივი ამოცანები, ძირითადად, გავლილი მასალიდან. კვლავ ვამახვილებთ ყურადღებას განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნების დაკავშირებაზე შესაბამისი ფუნქციების თვისებებთან (ზრდადობა, პერიოდულობა, შექცევადობა და ა. შ.).

მე-11 კლასის სახელმძღვანელოს თავისებურებები დაკავშირებულია სივრცული გეომეტრიის საკითხების თანამიმდევრულ გადმოცემასთან. ამ გადმოცემას ვუკავშირებთ პლანიმეტრიის აქსიომურ აგებას, აქსიომების შესახებ სწორი წარმოდგენების ფორმირებას და ახალი, სივრცული წარმოდგენების ჩამოყალიბებას და ამის საშუალებით, სივრცული გეომეტრიის აგებას. მოსწავლეებს უნდა შევუქმნათ სწორი წარმოდგენები გეომეტრიის აგების შესახებ; აქსიომა არის წინადადება, რომელიც ჭეშმარიტადაა გამოცხადებული და მასზე დაყრდნობით მტკიცდება მათემატიკური წინადადებები (თეორემები). ზოგიერთი თეორემის სხვადასხვა დამტკიცების წარმოდგენა ხელს უწყობს მოსწავლეთა ანალიტიკური აზროვნების განვითარებას.

მათემატიკის მე-11 კლასის სახელმძღვანელო 7 თავისგან შედგება. ყოველი თავი იწყება შესაბამისი კომპლექსური დავალების წარდგენით. ეს დავალებები შესაბამისი თავის სამიზნე ცნებებს უკავშირდება. მასზე მუშაობა თავში წარმოდგენილი საკითხების შესწავლის პარალელურად უნდა მიმდინარეობდეს. ამ პროცესს ხელს უწყობს თავის შინაარსში ჩართული ამოცანები, რომლებიც ეხმარება მოსწავლეებს კომპლექსური დავალების შესრულებაში.

ჩვენი სახელმძღვანელოს თავისებურებაა ამოცანების ორ ნაწილად დაყოფა — საკლასო და საშინაო სამუშაოების ცალ-ცალკე წარმოდგენა. საშინაო დავალების ამოცანები, ხშირად, კლასში განხილულის ანალოგიურია — ანალოგიის აღმოჩენა და გამოყენებაც ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ინტელექტუალური უნარია. თუმცა, მხოლოდ ანალოგიებით მოქმედება, ცხადია, შემოქმედებითი ზრდის ხელშემწყობ გარემოს ვერ ქმნის. ამიტომ, ამ საკითხსაც ვითვალისწინებთ — საშინაო დავალებების, პროექტების შესრულება მოითხოვს მოსწავლეებისგან შემოქმედებით საქმიანობას, ძირითადი სამიზნე ცნებების კარგ გააზრებას.

ვცდილობთ ტექსტის მეცნიერულ სანდოობასთან ერთად დავიცვათ მასალის გადაცემის „სიმკაცრის“ ზომიერი დონე, მისაწვდომობა. მაგალითად, სწორად უნდა იყოს აღწერილი აქსიომისა და თეორემის განსხვავებულობა, აქსიომის ცნების სწორი ჩამოყალიბება; ვიმეორებთ აუცილებელ და საკმარის პირობებს და ამ ტერმინების ენაზე ტექსტების ჩამოყალიბებას.

ყოველი პარაგრაფის ბოლოს შემაჯამებელი დასკვნებია. წარმოდგენილი მიმართულებები (რიცხვები, ალბათობა და სტატისტიკა, სიმრავლეები და ლოგიკა, გეომეტრია, ალგებრა) ერთმანეთთან მჭიდრო კავშირშია გადმოცემული (მაგალითად, გეომეტრიული დებულებების დასაბუთებისას ვიყენებთ ლოგიკის სხვადასხვა წესს; ხდომილობები, ხდომილობებზე მოქმედებები სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებითაა წარმოდგენილი; ვექტორული ანალიზი და კოორდინატთა მეთოდი გეომეტრიული დებულებების დასაბუთებისას გამოიყენება). ცალკეა გამოყოფილი ტექსტები ისტორიული ფაქტების, ტერმინების წარმოშობისა და საინტერესო მათემატიკური ფაქტების შესახებ (რუბრიკა — „ს“ და „ჩვენი ლექსიკონი“). სავარჯიშოთა სისტემები ისეა მოფიქრებული, რომ ისინი თეორიული მასალის შესწავლის სტიმულიცაა; ზოგიერთი თეორიული საკითხი სავარჯიშოთია წარმოდგენილი. თუმცა, ეს გადახვევები, ძირითადად, საკლასო ამოცანებში გვხვდება. ათობითი სისტემის თავისებურებების (პოზიციურობა, ათობითობა) გამეორებისა და გაღრმავების გზით, განვიხილავთ სხვა პოზიციურ სისტემებსაც, როცა ფუძე შეიძლება იყოს, მაგალითად, 2 ან 8. ამ სისტემების ცოდნა მნიშვნელოვანია ტექნოლოგიების სიღრმისეული შესწავლისთვის მოსწავლეთა შესამზადებლად.

გათვალისწინებულია მდგრადი განვითარების პრინციპების უზრუნველყოფა და გენდერული თანასწორობის გათვალისწინება — მათემატიკა ერთნაირად მისაწვდომია ყველა ადამიანისთვის, განურჩევლად სქესისა — ამას მოწმობს ისტორიული მაგალითები წარმატებული ქალი და კაცი მათემატიკოსებისა, რომელთა ისტორიებსაც სათანადო ადგილს ვუთმობთ (მათ შორის, ჩვენი ერის წარმატებულ წარმომადგენლებს).

მასწავლებლის წიგნის მოკლე მიმოხილვა

მასწავლებლის წიგნის დანიშნულებაა, მათემატიკის სტანდარტის შესაბამისად, მე-11 კლასში რეკომენდებული სამიზნე ცნებების (შესაბამისობა, ფუნქცია, გეომეტრიული ობიექტები, სიდიდეები, ზომები, ხდომილობა, ალბათობა, მონაცემები) შესაბამისი მასალის სწავლებისთვის საჭირო მეთოდიკური რეკომენდაციები მიაწოდოს მასწავლებელს. წიგნი ეხმარება მასწავლებელს სასწავლო პროცესის დაგეგმვასა და წარმართვაში, მიწოდებულია დამატებითი მასალა შემაჯამებელი წერების ჩასატარებლად, მათ შესაფასებლად.

ყოველი თემის მიხედვით განსაზღვრულია მკვიდრი წარმოდგენები, რომლებიც თემის შესწავლისას უნდა ჩამოყალიბდეს მოსწავლის ხანგრძლივ მეხსიერებაში.

მითითებულია შესაბამისი საკვანძო შეკითხვები; ამ შეკითხვებზე პასუხების მოძიება ეხმარება მოსწავლეს სამიზნე ცნებების უკეთ გააზრებაში.

მასწავლებლის წიგნში თავებისა და პარაგრაფების ნუმერაცია და დასახელებები ემთხვევა მოსწავლის სახელმძღვანელოში შემოღებულ ნუმერაციასა და დასახელებებს. ძირითადი აქცენტი უნდა კეთდებოდეს სასწავლო პროცესში მოსწავლის აქტიური ჩაბმის აუცილებლობაზე. სწავლება ძიებისა და დასაბუთების გზით უნდა მიმდინარეობდეს; მოსწავლე, როგორც წესი, თავად უნდა აღმოაჩენდეს ჭეშმარიტებას მოტივირებული სიტუაციის დაგეგმვის საშუალებით; მთავარია კვლევის პროცესი; არა მარტო პასუხების მოსმენა კითხვაზე: „რა“, არამედ, კითხვაზე — „როგორ“, ან — „კიდევ როგორ“. ამასთანავე, მნიშვნელოვანია იმის ცოდნაც — „რატომ“ — პასუხები კითხვაზე — „ეს რისთვის მჭირდება“. ამ მიმართულებით მუშაობის წარმართვაში მასწავლებლის სახელმძღვანელო დაგეხმარებათ. აუცილებელია მოსწავლეთა შემზადება მომავალი პროფესიული საქმიანობისთვის, დემოკრატიულ პროცესებში აქტიური მონაწილეობისთვის.

მასწავლებლის წიგნი ეხმარება მასწავლებელს შეფასების ინდიკატორების განსაზღვრაში, განმავითარებელი შეფასების განხორციელებაში. მნიშვნელოვანი აქცენტი კომპლექსურ დავალებებზე კეთდება. კომპლექსური დავალებების შესრულების ხარისხი აისახება განმავითარებელ და, შესაძლებელია, განმსაზღვრელ შეფასებებზეც. მასწავლებელმა შეფასებისთვის შეიძლება გამოიყენოს მასალის ათვისების დონეების თანამედროვე კლასიფიკაციის ნიმუშები. მაგალითად, სოლო (SOLO) ტაქსონომიის პრინციპი და მიღწევების 5 დონის დახასიათება მასწავლებელმა შეიძლება მოიძიოს ჩვენს სახელმძღვანელოებში (X კლასის მასწავლებლის წიგნები).

ამჯერადაც, ამ დონეების შესაბამისად, ჩამოვაყალიბებთ კრიტერიუმებს ყოველი სამიზნე ცნების გააზრების შესამოწმებლად, შესაბამისად, ჩამოყალიბდება განმავითარებელი შეფასების კომენტარი.

მასწავლებელს კვლავ შევახსენებთ: სოლო ტაქსონომიის დონეები მხოლოდ და მხოლოდ მასწავლებლისთვის განკუთვნილი ინსტრუქციაა, ისინი ეხმარება მასწავლებელს მიღებული შედეგების გაანალიზებაში. გაკეთებული ანალიზის გამოყენებით, მასწავლებელი მოსწავლეს აწვდის კომენტარს იმასთან დაკავშირებით, თუ რაში აქვს წინსვლა, რა აქვს გასაუმჯობესებელი და როგორ უნდა გააუმჯობესოს.

მასწავლებელმა შეიძლება გამოიყენოს შეფასების ინსტრუმენტები, რომლებიც ითვალისწინებს საერთაშორისო შემფასებლების სტრატეგიებს (TIMSS, PISA და სხვა).

ამასთანავე, მასწავლებლებს შევახსენებთ, რომ განმავითარებელი შეფასება უწყვეტად მიმდინარეობს; ის უნდა იწყებოდეს საშინაო დავალების განხილვისას, საკლასო ამოცანების ამოხსნისას.

ამ პროცესის განხორციელებაში პედაგოგს მასწავლებლის წიგნი ეხმარება. მასში წარმოდგენილია ამოცანების ამოხსნების სხვადასხვა ხერხი. მასწავლებლის წიგნში აღწერილია ახალ მასალაზე გადასვლისა და შესაბამისი ამოცანების განხილვის პროცესი. აქვეა შემაჯამებელი წერების სარეკომენდაციო ნიმუშებიც, რომლებიც დახმარებას გაგიწევთ აღნიშნული წერისთვის მზადებასა და შედეგების განხილვაში.

სტანდარტის შედეგების მიღწევათა და შინაარსის ურთიერთკავშირის მატრიცა

თემების ჩამონათვალი	სტანდარტის შედეგები (მოსწავლემ უნდა შეძლოს)	საμიზნე ცნებები	კომპლექსური დავალება
ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და პერიოდული პროცესები; ერთეულოვანი წრეწირი, ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები; ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი გრაფიკები; ჰარმონიული რხევები; უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებები.	პერიოდული პროცესების აღწერა, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების გამოყენება; უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნა გრაფიკების გამოყენებით, ჰარმონიული რხევების აღწერა ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით.	შესაბამისობა, გრაფიკი, ფუნქცია, ფუნქციის გრაფიკი, პერიოდული პროცესები; ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.	რხევითი პროცესები და ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.
ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები სამკუთხედში; სინუსებისა და კოსინუსების თეორემები.	გამოიყენოს ტრინოგომეტრიული ფუნქციები და დაამყაროს კავშირი სამკუთხედის ელემენტებს შორის; გამოიყენოს სამკუთხედში ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას.	გეომეტრიული ობიექტები, ზომები; გეომეტრიულ ობიექტებთან დაკავშირებული სიდიდეების გაზომვა (სიგრძე, ფართობი).	ტრიგონომეტრიის სხვადასხვა გამოყენება.
ვექტორები, მოქმედებები ვექტორებზე. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი და მისი გამოყენება.	ვექტორებისა და ვექტორებზე მოქმედებების გამოყენებით გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა, ამოცანების ამოხსნა ფიზიკიდან.	ვექტორი.	ვექტორების სხვადასხვა გამოყენება (გეომეტრიული დებულებების დასაბუთება, მოძრაობის აღწერა).
სხვადასხვა პოზიციური სისტემა; რიცხვები და მოქმედებები რიცხვებზე. n-ური ხარისხის ფესვი; რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი; გამოსახულებების გარდაქმნის მაგალითები.	პოზიციური სისტემის თავისებურებების აღწერა და გააზრება; სხვადასხვა პოზიციური სისტემის მნიშვნელობის აღწერა; რიცხვითი გამოსახულების გარდაქმნა.	ნატურალური რიცხვები და მათი ჩაწერის სისტემები; ნამდვილი რიცხვები, რიცხვითი გამოთვლები.	რიცხვების ჩაწერის სხვადასხვა წესი — თვლის სისტემები.

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები; ლოგარითმის თვისებები; მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები და უტოლობები.	შესასწავლი მოვლენიდან გამომდინარე სიდიდეებს შორის ფუნქციური კავშირის დამყარება; ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ფუნქციების თვისებების გამოყენება სხვადასხვა კონტექსტში ცვლილებათა გასაანალიზებლად; გრაფიკების გამოყენებით მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნა.	შესაბამისობა, გრაფიკი, ფუქცია, განტოლება, უტოლობა.	მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები და მათი ზოგიერთი გამოყენება.
სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები; დებულებათა დასაბუთების ხერხები. მიმართებები სივრცეში: წრფეებს შორის, წრფესა და სიბრტყეს შორის, სიბრტყეებს შორის; კუთხე სიბრტყეებს შორის, კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის, ორწახნაგა კუთხე; სიბრტყისადმი მართობი და დახრილი, სამი მართობის თეორემა.	სიმრავლეთა თეორიაზე დაყრდნობით, ლოგიკური მსჯელობითა და დასაბუთებით ამოცანის ფორმულირება, პრობლემის გადაჭრა. სტერეომეტრიის საწყისების შესწავლისას აქსიომების ჩამოყალიბება და მათი შესაბამისი გამოყენება. გეომეტრიული დებულებების დასაბუთება ლოგიკის წესების გამოყენებით; აუცილებელი და საკმარისი პირობების გამოყენება.	სიმრავლე; რიცხვითი სიმრავლეები. გეომეტრიული ობიექტები, მიმართებები გეომეტრიულ ობიექტებს შორის.	სტერეომეტრიის თვისებები და მათი პრაქტიკული გამოყენებები.
მონაცემების შეგროვება, კლასიფიკაცია, წარმოდგენა; შემაჯამებელი რიცხვითი მახასიათებლები; კომბინატორიკის წესები, კომბინატორიკის ფორმულები. ხდომილობათა სივრცე, ხდომილობის ალბათობა; ოპერაციები ხდომილობებზე, ხდომილობათა ჯამის ალბათობა.	საკვლევი თემის განსაზღვრა, კვლევის დეგეგმვა, მონაცემების შეგროვება, დამუშავება, ანალიზი, წარმოდგენა; ხდომილობის ალბათობის შეფასება.	მონაცემები, ხდომილობა, ალბათობა.	ალბათობის პრაქტიკული გამოყენებები.

I თავი

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

თემები: პერიოდული პროცესები და პერიოდული ფუნქციები; ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.
საათების სავარაუდო რაოდენობა: 20 სთ
თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები, გრაფიკები; ტრიგონომეტრიული განტოლებები.

სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	კომპლექსური დავალება
შესაბამისობა, ფუნქცია, ფუნქციის პერიოდულობა, პერიოდული ფუნქციები. რხევითი პროცესები შეიძლება აღიწეროს ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით; ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკები გვეხმარება უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნაში.	სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი — თვისებები, გრაფიკები. უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნის ფორმულები.	რა ფუნქციებით შეიძლება აღვწეროთ რხევითი პროცესები? რა დახმარებას გვიწევს გრაფიკები ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამონახსნის ფორმულების მიღებაში?	რხევითი პროცესები და ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით (მათ. საშ. 1); ალგებრულ გამოსახულებებს შორის კავშირის დამყარება; ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენის მათემატიკური მოდელირება; შესასწავლი მოვლენიდან გამომდინარე, ცვლად სიდიდეთა შორის ფუნქციური კავშირის დამყარება და წარმოდგენა სხვადასხვა ფორმით; ფუნქციის გამოყენება სხვადასხვა კონტექსტში ცვლილებათა გასაანალიზებლად და რეალური მოვლენის მოდელირებისთვის (მათ. საშ. 2; მათ. საშ. 3).
ბუნებაში მიმდინარე ჰარმონიული რხევების მოდელირება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დახმარებით.

1.1. პერიოდული პროცესები და პერიოდული ფუნქციები.

პირველ თავს ვიწყებთ პერიოდული პროცესებისა და პერიოდული ფუნქციების განხილვას. მასწავლებელმა შეიძლება საკითხების გადაცემის თანამიმდევრობის სახელმძღვანელოსგან განსხვავებული ვარიანტი აირჩიოს. პირველ პარაგრაფში განხილული საკითხების ნაწილი მოსწავლეებისთვის ნაცნობია; მაგალითად, ისინი იცნობენ ნამდვილი რიცხვის მთელ და წილად ნაწილებს; ამიტომ შესაბამისი საკითხებით დაწყება წინარე ცოდნის წინ წამოწევასაც ემსახურება; მაგალითად, შეიძლება დავიწყოთ წილადი ნაწილის თვისებების განხილვა და დავუკავშიროთ პერიოდულობის განსაზღვრებას; წინარე ცოდნის გააქტიურება ფუნქციის ცნების გააზრებასთან არის დაკავშირებული; პარაგრაფის მთავარი ნაწილი პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრებაა. მოსწავლეებს უნდა ავუხსნათ, რომ ბუნებაში მიმდინარე მოვლენები, ხშირად, გარკვეული პერიოდულობით, განმეორებადობით გამოირჩევა და მათ აღსაწერად და შესასწავლად შეიქმნა მათემატიკური აპარატი — პერიოდული ფუნქციები. მასალის წარმოდგენის პროცესი მოსწავლეთა აქტიური მონაწილეობით მიმდინარეობს, მათ შეიძლება დაასახელონ პროცესები, რომლებიც პერიოდულობით გამოირჩევა. ძირითადი სამიზნე ცნება ფუნქციაა; მნიშვნელოვანი მომენტი პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრება და ასეთი ფუნქციის პირველი მაგალითების წარმოდგენაა. პერიოდულობის განსაზღვრებისას, მთავარია ნულისგან განსხვავებული l რიცხვის არსებობა, რომლისთვისაც განსაზღვრის არიდან აღებულ ყოველ x-თან ერთად $x-l$ და $x+l$ რიცხვებიც ეკუთვნის განსაზღვრის არეს. ამასთანავე,

$$f(x)=f(x+l).$$

იქვე ვასაბუთებთ, რომ სრულდება ტოლობაც:

$$f(x-l)=f(x).$$

პერიოდული ფუნქციის გრაფიკის აგების ილუსტრირება დაეხმარება მოსწავლეებს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკების აგების გააზრებაში.

სავარჯიშოებით მიმდინარეობს პერიოდულობის, პერიოდული ფუნქციის შესახებ ცოდნის განმტკიცება. განსაზღვრებების გამოყენებით, მოსწავლეები ადვილად პოულობენ „ტესტების“ პასუხებს.

აქ ყურადსაღებია 8 ტესტი; $\left[\frac{x}{5}\right]$ გვიჩვენებს 5-ის ჯერადების რაოდენობას x რიცხვამდე, ამ რაოდენობის 5 ტ ტევადობის ავტომანქანები შეიძლება იყოს საკმარისი x ტ ტვირთის გადასაზიდად, თუ x იყოფა 5-ზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში საკმარისი იქნება $\left[\frac{x}{5}\right]+1$ რაოდენობის ავტომანქანა.

ავტომანქანების საკმარისი რაოდენობა არ შეიძლება იყოს $\left[\frac{x}{5}\right]-1$.

9 რადგან $\{x\}=x-[x]$, ამიტომ $[x]+\{x\}=x$.

მთელი და წილადი ნაწილების შესახებ ცოდნის განმტკიცებას, ემსახურება 10-12 ამოცანები. მაგალითები: $[-12,4]=-13$; $[-6,(4)]=-7$; $\{-0,43\}=-0,43-[-0,43]=-0,43+1=0,57$.

თუ $\{x\}=\frac{1}{2}$, მაშინ x შეიძლება იყოს, მაგალითად, $2\frac{1}{2}$; $-3,5$. $x=n+\frac{1}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

13 ეს ამოცანა შეიძლება ამოვხსნათ საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით; დავუშვათ საწინააღმდეგო, მოიძებნება ისეთი n_0 მთელი რიცხვი, რომლისთვისაც $(x_0+n_0l)\in D(f)$.

მაშინ პერიოდული ფუნქციის თვისებების თანახმად, $(x_0+n_0l)-n_0l$ ეკუთვნის f-ის განსაზღვრის არეს; $x_0\in D(f)$, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

14 ა) თუ $D(f)$ (f-ის განსაზღვრის არე) შეიცავს, მაგალითად, x_0-ს, მაშინ ნებისმიერი

ნატურალური n-ისთვის, $x_0+nl\in D(f)$ და $x_0-nl\in D(f)$. აქ l ფუნქციის პერიოდია.

ბ) ყოველი $x_0\in D(f)$ რიცხვისთვის ზემოთ აღწერილი წესით განსაზღვრული მიმდევრობებისთვის გვაქვს:

$f(x_0)=f(x_0+nl)=f(x_0-nl)$ — ნებისმიერი $n\in\boldsymbol{N}$-ისთვის.

გ) ამოცანაში მითითებულია, რომ $f(x)$-ის განსაზღვრის არე ნამდვილ რიცხვთა $\boldsymbol{R}$ სიმრავლეა და მისი პერიოდია l. განვიხილოთ ფუნქცია $f(ax)$; თუ $x\in\boldsymbol{R}$, მაშინ $u=ax\in\boldsymbol{R}$ და $f(u)$ არის პერიოდული ფუნქცია, პერიოდით l; $u+l\in\boldsymbol{R}$, $u-l\in\boldsymbol{R}$ და $f(u+l)=f(u)$.

თუ $x\in\boldsymbol{R}$, მაშინ $x+\dfrac{l}{a}\in\boldsymbol{R}$ და $x-\dfrac{l}{a}\in\boldsymbol{R}$. ამასთანავე, ნებისმიერი x-სთვის $\boldsymbol{R}$-დან, გვაქვს:

$$f(a(x+\frac{l}{a}))=f(u+l)=f(u)=f(ax).$$

ეს ნიშნავს იმას, რომ $\dfrac{l}{a}$ არის პერიოდი $y=f(ax)$ ფუნქციის.

დ) თუ l_1 პერიოდია, მაშინ პერიოდი იქნება kl_1; ამრიგად,

$$f(x+kl_1+nl_2)=f(x+nl_2).$$

ანალოგიურად, f-ის პერიოდია, nl_2. ამიტომ

$$f(x+nl_2)=f(x).$$

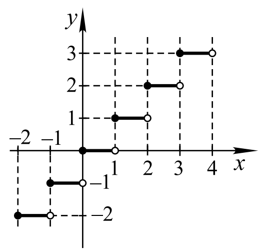
(15) პერიოდული ფუნქცია არ შეიძლება იყოს კლებადი, ან ზრდადი, რადგან, თუ $x_0\in D(f)$ და l არის პერიოდი, მაშინ

$$x_0-l<x_0<x_0+l \text{ და}$$
$$f(x_0-l)=f(x_0)=f(x_0+l).$$

პერიოდულ ფუნქციას ან არა აქვს ნული, ან აქვს ნულების უსასრულო რაოდენობა; თუ x_0 ნულია, მაშინ ნული იქნება x_0+nl, $n\in\boldsymbol{Z}$.

(16) განვიხილოთ $y=[x]$ ფუნქცია. განსაზღვრის არე — $D(y)=\boldsymbol{R}$; მნიშვნელობათა სიმრავლე — $E(y)=\boldsymbol{Z}$; თუ $x_1<x_2$, მაშინ $y(x_1)\le y(x_2)$ — ფუნქცია არაკლებადია.

ფუნქცია არ არის პერიოდული, $[n;\ n+1)$ სახის ყოველ შუალედში ფუნქცია მუდმივია, მისი მნიშვნელობა არის n.



(17) ა) $\{x+\frac{1}{3}\}=\frac{1}{2}$.

აქედან, ცხადია, $x+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+m$, m ნებისმიერი მთელი რიცხვია; $x=\frac{1}{6}+m$, $m\in\boldsymbol{Z}$.

გ) $\{2x+\frac{2}{5}\}=\frac{1}{3}$, აქედან, ცხადია,

$2x+\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+m$, $m\in\boldsymbol{Z}$;

$2x=-\frac{1}{15}+m$, $m\in\boldsymbol{Z}$;

$x=-\frac{1}{30}+\frac{m}{2}$, $m\in\boldsymbol{Z}$.

(18) ა) $n\in\boldsymbol{N}$, p მარტივია და $p<n$. p-ს ჯერადების რაოდენობაა $\left[\frac{n}{p}\right]$;

ბ) p^2-ის ჯერადების რაოდენობაა $\left[\frac{n}{p^2}\right]$, თუ $n<p^2$, მაშინ $\left[\frac{n}{p^2}\right]=0$;

გ) p^3-ის ჯერადების რაოდენობაა $\left[\frac{n}{p^3}\right]$, თუ $n<p^3$, მაშინ $\left[\frac{n}{p^3}\right]=0$.

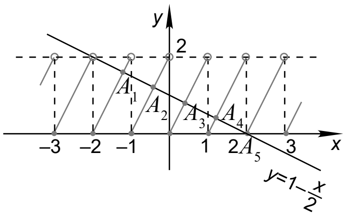
დ) უნდა ვიპოვოთ ის β რიცხვი, რომლისთვისაც p^β შედის $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ რიცხვის კანონიკურ დაშლაში; p არის გამყოფი p-ს ყველა ჯერადისა 1-დან n-მდე, მათი რაოდენობაა $\left[\frac{n}{p}\right]$. ეს რიცხვი იქნებოდა β, თუ $n<p^2$. წინააღმდეგ შემთხვევაში, p-ზე იყოფა კიდევ $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ რაოდენობის რიცხვი, p-ზე შეიძლება იყოფოდეს კიდევ $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ რაოდენობის რიცხვი (თუ $p^3\leq n$).

ცხადია, $\beta=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$

შეკრება შეწყდება p-ს იმ ხარისხზე, რომელიც მეტია n-ზე.

სასურველია, თუ მოსწავლეები განიხილავენ n-ის სხვადასხვა მნიშვნელობას და შეეცდებიან დაადგინონ, მაგალითად, რა მაჩვენებლით შედის $n!$-ის კანონიკურ დაშლაში რიცხვი 2, რიცხვი 5.

(19) ავაგოთ $y=2\{x\}$ და $y=1-\frac{x}{2}$ ფუნქციების გრაფიკები და ვიპოვოთ გადაკვეთის წერტილების რაოდენობა — გრაფიკებს აქვს გადაკვეთის ხუთი წერტილი.



მოსწავლეთა ყურადღება გავამახვილოთ იმ ფაქტზე, რომ (–2; 2) წერტილი არ ეკუთვნის $y=2\{x\}$-ის გრაფიკს, ანუ $x=-2$ არ არის განტოლების ფესვი; $x=2$ არის ფესვი.

(20) აქ მოსწავლეები ითვალისწინებენ (14) ამოცანის ერთ-ერთ შედეგს. ამ შედეგის გათვალისწინებით, ფუნქციის პერიოდი იქნება რიცხვი: $36+(-1)\cdot24=12$.

საშინაო დავალების „ტესტებშიც“ პერიოდული ფუნქციების თვისებების გათვალისწინებით, ადვილად მოიძებნება პასუხები. ამოცანების ნაწილი კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია. თუმცა, მოსწავლეებისგან ხშირად, დამატებით მსჯელობას მოითხოვს.

9 ეს ამოცანა (14) ამოცანის ანალოგიურია, თუმცა, დამატებით მსჯელობას მოითხოვს. უნდა გავითვალისწინოთ პერიოდულობის ყველა მოთხოვნა; მაგალითად, მოთხოვნა, რომელიც განსაზღვრის არეს უკავშირდება; ვთქვათ, X არის $y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე, მაშინ $y=f(ax+b)$ ფუნქციის განსაზღვრის X_0 არე შეიცავს იმ x რიცხვებს, რომლებისთვისაც $u=ax+b\in X$. $y=f(u)$ პერიოდულია, პერიოდით l, მაშასადამე, ნებისმიერი $u\in X$-ისთვის გვაქვს: $u+l\in X$, $u-l\in X$ და $f(u+l)=f(u)$. თუ $x\in X_0$, მაშინ $x+\frac{l}{a}\in X_0$ და $x-\frac{l}{a}$

$\in X_0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში, $a(x+\frac{l}{a})+b=ax+b+l=u+l$ და $a(x-\frac{l}{a})+b=ax+b-l=u-l$ არ იქნებოდნენ X-ის ელემენტები, რაც ეწინააღმდეგება პირობას: $u+l\in X$, $u-l\in X$). ამასთანავე, გვაქვს: $f(a(x+\frac{l}{a})+b)=f(ax+b+l)=f(u+l)=f(u)=f(ax+b)$. მაშასადამე, $\frac{l}{a}$ არის $y=f(ax+b)$ ფუნქციის პერიოდი.

მოსწავლეების უმრავლესობა მხოლოდ ბოლო ტოლობის წარმოდგენით შემოიფარგლება; შევახსენოთ პერიოდულობის ყველა მოთხოვნა.

10 განვიხილოთ, მაგალითად, კვადრატული ფუნქცია; შეიძლება გამოვიყენოთ გრაფიკი, თვისებები.

თუმცა, შეიძლება ასე ვიმსჯელოთ:

თუ ვიგულისხმებთ, რომ არსებობს ისეთი $l\neq 0$, რომლისთვისაც ნებისმიერი x-ისთვის, $x+l\in\boldsymbol{R}$, $x-l\in\boldsymbol{R}$ და $ax^2+bx+c=a(x+l)^2+b(x+l)+c$, მაშინ გვექნება $2ax\cdot l+al^2+bl=0$; $2ax+al+b=0$; მაშასადამე, l-ის მნიშვნელობა დამოკიდებულია x-ზე. კვადრატული ფუნქცია არ არის პერიოდული.

11 $3x+2{,}4=0{,}2+m,\ m\in\boldsymbol{Z},$

$3x=m-2{,}2,$

$$x=\frac{m}{3}-\frac{11}{15},\ m\in\boldsymbol{Z}.$$

12 ნულების რაოდენობას ამ ჩანაწერში განსაზღვრავს 5-ის უმაღლესი ხარისხი, რომელიც 200!-ის გამყოფია. ამრიგად, საკმარისია ვიპოვოთ ხარისხის მაჩვენებელი, რომლითაც რიცხვი 5 შედის 200!-ში:

$$\beta=\left[\frac{200}{5}\right]+\left[\frac{200}{25}\right]+\left[\frac{200}{125}\right]=40+8+1=49.$$

ამ ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლეები იყენებენ კლასში ამოხსნილი 18 ამოცანის შედეგს.

14 და 15 ამოცანების ანალოგიურები კლასში ამოიხსნა.

15 რადგან 5 და 8 პერიოდია, ამიტომ $(-3)\cdot 5+2\cdot 8$ პერიოდია, ე. ი. 1 პერიოდია.

1.2. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

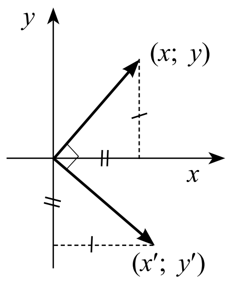
პარაგრაფის თეორიული ნაწილი წინარე ცოდნის გააქტიურებასაც შეიცავს; სიბრტყის გეომეტრიული გარდაქმნა — მობრუნება O ცენტრის გარშემო α კუთხით, კუთხის რადიანული და გრადუსული ზომები და მათ შორის კავშირები, მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები — წინა წლებში გავლილი საკითხებია; ცოდნის შეჯამებას და გაღრმავებას პარაგრაფის მნიშვნელოვანი ნაწილი ეთმობა; შესაბამისად, მუშაობა შეიძლება წარვმართოთ ინტერაქტიული მეთოდით, მოსწავლეთა აქტიური ჩართულობით; მაგალითად, მოსწავლეები იხსენებენ მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს — მახვილი კუთხეების სიმრავლის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ასახვებს, რომლებითაც სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი შემოვიტანეთ.

მობრუნებაც უფრო გაღრმავებული სახით განიხილება — ვუკავშირებთ კუთხის რადიანულ ზომას, შესაბამისობას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და წრეწირის წერტილებს შორის — ყოველ t რიცხვს ვუთანადებთ წრეწირზე იმ P_t წერტილს, რომლის შესაბამისი P_0P_t რკალის რადიანული ზომა t რიცხვის ტოლია; $P_0=(1;\ 0)$.

სტანდარტით მოითხოვება ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შემოღება; მოსწავლეებს, ამასთანავე, შევახსენებთ, რომ P_t წერტილის წრეწირზე მოძრაობისას, მისი გეგმილი O_x (O_y) ღერძზე ასრულებს რხევით მოძრაობას; ამიტომ შეიძლება კომპლექსურ დავალებაზე ფიქრი და შესაბამისი მასალის მოძიება.

„ტესტებზე“ პასუხების მოძიება დაკავშირებულია ძველი და ახალი მასალის შესახებ ცოდნის განმტკიცებასთან — მობრუნების განსაზღვრა, კუთხის რადიანული და გრადუსული ზომა, კავშირები ამ ზომებს შორის; ტრიგონომეტრიული ფუნქციების (სინუსის და კოსინუსის) მნიშვნელობათა სიმრავლეების ცოდნა გვეხმარება სწრაფად დავადგინოთ „ტესტების“ პასუხები.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად



10 შეიძლება გამოვიყენოთ $-\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნების კოორდინატებით გამოსახვის ფორმულები;

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=-x \end{cases}$$

მასწავლებელმა, წრფივი ალგებრის კურსიდან უნდა იცოდეს ჩვენ მიერ განხილულ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ნებისმიერი α კუთხით მობრუნების ფორმულები:

$$x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha$$

$$y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

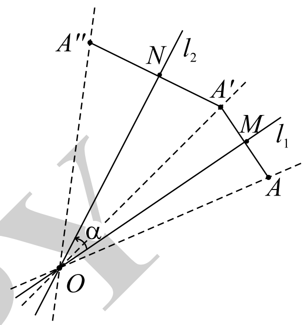
$\alpha=-\frac{\pi}{2}$ შემთხვევა შეიძლება ცალკე განვიხილოთ და მივიღოთ ზემოთ მითითებული ფორმულები:

მაშასადამე, $y=2x-1$ წრფე აისახება $x'=-2y'-1$ წრფეზე;

ანუ, მიიღება წრფე:

$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.$$

(11) l_2 და l_1 შესაბამისად, $A'A''$ და AA' მონაკვეთების შუამართობებია. რადგან $OA=OA'=OA''$, ამიტომ არსებობს მობრუნება O წერტილის გარშემო, რომელიც A წერტილს ასახავს A'' წერტილზე. ამ მობრუნების კუთხე არ არის დამოკიდებული A წერტილის არჩევაზე. ვთქვათ, $\angle AOM=\beta$, მაშინ $\angle A'OM=\beta$, $\angle A'ON=\angle A''ON=\alpha-\beta$. ამრიგად,



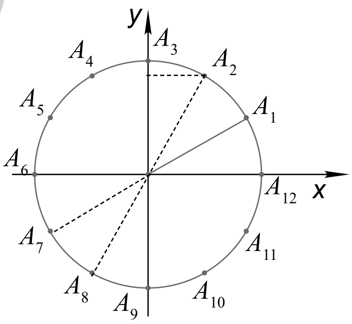
$\angle AOA''=2\beta+2(\alpha-\beta)=2\alpha$.

მაშასადამე, საძიებელი მობრუნებაა $R_0^{2\alpha}$.

(12) ცხადია, A_1 შეესაბამება რიცხვს: $t_1=\frac{\pi}{2}:3=\frac{\pi}{6}$; $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2})$;

A_2 — t_2–ს, $t_2=\frac{2\pi}{6}$; $A_2=(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2})$

ორივე შემთხვევაში გამოვიყენეთ მართკუთხა სამკუთხედში $\frac{\pi}{6}$-ის ტოლი მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტის თვისება; $A_3=(0;\ 1)$; სხვა წერტილების კოორდინატები შეიძლება ვიპოვოთ წრფის მიმართ, ან წერტილის მიმართ სიმეტრიების გამოყენებით.



$A_4=(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2})$; $A_5=(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2})$;

$A_6=(-1;\ 0)$; $A_7=(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2})$;

$A_8=(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2})$; $A_9=(0;\ -1)$;

$A_{10}=(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2})$; $A_{11}=(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2})$; $A_{12}=(1;\ 0)$;

ბ) $sin(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$, $cos(-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{\sqrt{3}}$,

გამოვიყენეთ A_{11}-ის კოორდინატები.

(13) ბ) $sin(-\frac{11\pi}{2})=sin(-\frac{11\pi}{2}+6\pi)=sin\frac{\pi}{2}=1$; $cos(-\frac{11\pi}{2})=0$.

(14) ბ) $\dfrac{2sin\frac{\pi}{3}soc\frac{\pi}{3}}{sin\frac{\pi}{4}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot tg\frac{\pi}{3}=\dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{3\sqrt{6}}{2}=-\sqrt{6}$.

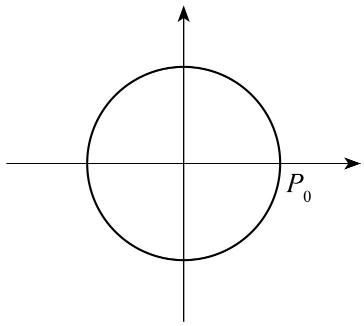
(15) აქ ვითვალისწინებთ, რომ $\pi\approx 3{,}14$, $\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57$.

შეიძლება გამოვიყენოთ გრადუსულ ზომაზე გადასვლა. 1 რად $\approx 57^0$; 2 რადიანი $\approx 114^0$ — მეორე მეოთხედშია.

(16) უნდა ვისარგებლოთ ფორმულით: რკალის სიგრძე $l=R\alpha$, სადაც α არის კუთხის ზომა რადიანებში. თუ $R=15$, $l=5$, მაშინ $\alpha=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$ (რადიანი).

17 ა) $\frac{\pi}{4}$ წამის შემდეგ $\alpha=\frac{\pi}{4}$ რად.

ბ) $\frac{2\pi}{3}$ წთ$=40\pi$ წმ; $\alpha=40\pi$ რად, წერტილი დაემთხვევა P_0-ს.



18 ა) $t=\pi+2\pi k$; ბ) $\alpha=\frac{\pi}{6}+2\pi k$; დ) $\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

19 $sint=1$; $t=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$,

$cost=-1$; $t=\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$,

$tgt=0$; $t=\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

20 $|sint|\leq 1$;

$\sqrt{3}>1$, ამიტომ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}>1$;

$sint=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ტოლობა შეუძლებელია.

21 მოსწავლის მსჯელობა არ არის სწორი; პერიოდულობა ნიშნავს, რომ არსებობს $T\neq 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ განსაზღვრის არიდან აღებული **ნებისმიერი** x რიცხვისთვის სრულდება ტოლობა $f(x+T)=f(x)$.

ა) ამ შემთხვევაში, შეამოწმეთ $sin(t+\frac{2\pi}{3})=sint$ ტოლობა. მაგალითად, როცა $t=0$.

ბ) შეამოწმეთ $cos(t+\pi)=cost$ ტოლობა, როცა $t=0$.

22 $g(t+T)=kf(t+T)+b=kf(t)+b=g(t)$.

23 ვთქვათ, $k>0$ და $g(x)=f(kx)$;

$g(x+\frac{T}{k})=f(k(x+\frac{T}{k}))=f(kx+T)=f(kx)=g(x)$, $\frac{T}{k}$ პერიოდია.

ვთქვათ, $T_1<\frac{T}{k}$ და პერიოდია. მაშინ გვაქვს:

$$g(x+T_1)=g(x),$$

$$f(kx+kT_1)=f(kx) \qquad (1)$$

მაგრამ $kT_1<T$; T კი უმცირესი პერიოდია.

მივიღეთ წინააღმდეგობა, ე. ი. (1) შეუძლებელია.

ანალოგიურ შედეგს მივიღებთ $k<0$ შემთხვევაშიც.

24 $cos3x$-ის პერიოდია $\frac{2\pi}{3}$; $cos4x$-ის — $\frac{2\pi}{4}$.

$2\pi=3\cdot\frac{2\pi}{3}$, $2\pi=4\cdot\frac{2\pi}{4}$

2π ორივე შესაკრების პერიოდია; ეს რიცხვი ჯამის პერიოდიცაა. 2π — უმცირესი დადებითი პერიოდიცაა:

$cos3x$-ის პერიოდებია $k\cdot\frac{2\pi}{3}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; (2)

$cos4x$-ის — $k\cdot\frac{2\pi}{4}$, $k\in Z$; (3)

(2) და (3) სახის რიცხვებში უმცირესია 2π.

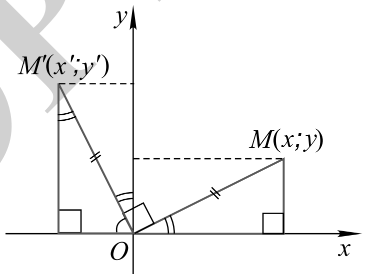
25 აქ ვითვალისწინებთ: $|sinx|\le 1$; $|cosx|\le 1$; $0\le cos^2x\le 1$.

გ) $5sin^2t+4cos^2t=sin^2t+4sin^2t+4cos^2t=sin^2t+4$.

უდიდესი მნიშვნელობაა 5, უმცირესი მნიშვნელობა 4.

საშინაო დავალების ამოცანების უმრავლესობა კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია. თუმცა, ზოგჯერ დამატებით მსჯელობას და განსხვავებული ფორმულების გამოყვანას მოითხოვს.

მაგალითად, 13 ამოცანაში მოსწავლემ შეიძლება ისარგებლოს $\frac{\pi}{2}$-ით მობრუნების ფორმულებით. ეს ფორმულები პარაგრაფის თეორიულ ნაწილშია ილუსტრირებული; $x'=-y$, $y'=x$.



19 80 კმ/სთ $=\frac{80\,000}{60}=\frac{4\,000}{3}$ მ/წთ;

75 სმ = 0,75 მ; წრეწირის სიგრძეა: $2\pi R=0{,}75\pi$ (მ);

სრულ ბრუნვათა რიცხვი:

$[\frac{4\,000}{3\cdot 0{,}75\pi}]=565$ (ბრუნი).

23 $sin(-\frac{111\pi}{4})=sin(-27\frac{3}{4}\pi)=sin(-28\pi+\frac{\pi}{4})=sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

24 ვთქვათ, $h(x)=f(x)+g(x)$; $h(x+T)=f(x+T)+g(x+T)=f(x)+g(x)=h(x)$.

25 ა) $T=\frac{2\pi}{3}$;

ე) $2sin3x+3cos2x$ — ვისარგებლოთ ანალოგიური ამოცანის შედეგით საკლასო დავალებიდან;

$T=2\pi$ ($T_1=\frac{2\pi}{3}$; $T_2=\frac{2\pi}{2}$; T_1 და T_2-ის „უმცირესი საერთო ჯერადი“ არის 2π).

1.3. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები

წინარე ცოდნის გააქტიურება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრებების ჩამოყალიბებით იწყება; მოსწავლეები ყურადღებას ამახვილებენ ერთეულოვან წრეწირზე მოძრავი წერტილის შესაბამისობაზე ნამდვილ რიცხვთან — რკალის რადიანულ (ან გრადუსულ) ზომასთან. წრეწირის ყოველი P_t წერტილი t რიცხვს წარმოგვიდგენს; ამასთანავე, ეს წერტილი ყველა იმ t რიცხვის შესაბამისია, რომლებიც ერთმანეთისგან 2π-ის ჯერადით განსხვავდება; P_t წერტილის კოორდინატებით შემოდის t რიცხვის სინუსი და კოსინუსი.

ნებისმიერი t რიცხვისთვის არსებობს მობრუნება, რომლის რადიანული ზომა t რიცხვით გამოისახება; t რიცხვის სინუსი და კოსინუსი ეწოდება t რადიანის ტოლი კუთხის სინუსსა და კოსინუსს; t რიცხვის სინუსი ამ რიცხვის შესაბამისი P_t წერტილის ორდინატია, კოსინუსი — აბსცისა. იმ t რიცხვებისთვის, რომლებისთვისაც $cost\neq 0$, განვსაზღვრავთ tgt-ს:

$$tgt=\frac{sint}{cost}.$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების პერიოდულობა; სინუსი და კოსინუსი ნამდვილ რიცხვთა $\boldsymbol{R}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული პერიოდული ფუნქციებია. მართლაც, P_t და $P_{t+2\pi n}$, $n\in\boldsymbol{Z}$ წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა. ამიტომ სინუსი და კოსინუსი 2π პერიოდის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია; ახალ საკითხებს ტანგენსის პერიოდულობის განხილვით ვიწყებთ; მოსწავლეებს გავაცნობთ ტანგენსების ღერძს და ამ ღერძის საშუალებით ტანგენსის წარმოდგენას, ამას მოსდევს ტანგენსის პერიოდულობის ჩვენება. მოსწავლეებისთვის თვალსაჩინოა, რომ ტანგენსის უმცირესი დადებითი პერიოდი π რიცხვია; ყველა მოსწავლემ უნდა შეძლოს სინუსის (კოსინუსის) უმცირესი დადებითი პერიოდის დასახელება და დამტკიცება, რომ 2π უმცირესი დადებითი პერიოდია. აქ კიდევ ერთხელ გაიაზრებენ პერიოდულობის განსაზღვრებას. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ერთეულოვანი წრეწირით განსაზღვრება გვეხმარება მათი სხვა თვისებების დახასიათებაში: ნულების სიმრავლეების წარმოდგენაში. სინუსის ნულებია πk, $k\in\boldsymbol{Z}$ რიცხვები, კოსინუსის — $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ რიცხვები, ტანგენსის — πk, $k\in\boldsymbol{Z}$ რიცხვები.

ერთეულოვანი წრეწირი გვეხმარება მეოთხედების მიხედვით ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნების დადგენაში; ლუწობისა და კენტობის დაფიქსირებაში. აქ მოსწავლეები იხსენებენ ლუწი და კენტი ფუნქციების განსაზღვრებებს და ადგენენ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლუწობას ან კენტობას.

პარაგრაფში წარმოდგენილი მასალა სჯობს ნაწილებად დაყოთ და სხვადასხვა გაკვეთილზე გაანაწილოთ. ბოლო ნაწილი დაყვანის ფორმულებს დაეთმობა; წარმოდგენილია რამდენიმე შემთხვევა; ისინი დაწვრილებით არის განხილული. ყველა ფორმულის ჩანაწერს თან ერთვის წესი, რომლითაც ეს ფორმულები მოიცემა. წესის გამოყენება შეიძლება რამდენიმე მაგალითის განხილვით წარმოადგინოთ.

ამოცანების საშუალებით მიმდინარეობს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების შესახებ ცოდნის განმტკიცება. ამოცანების განხილვაც სხვადასხვა გაკვეთილზე მოგიწევთ. თუმცა, სასურველია, შეჯამების სახით, „ტესტები“ ერთ გაკვეთილზე განიხილოთ; ისინი ეხება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნებს, პერიოდულობის, ლუწობისა და კენტობის, მონოტონურობის საკითხებს. მაგალითად, დაყვანის ფორმულების

გამოყენებით, მოსწავლე ადვილად პოულობს პასუხს (13) „ტესტში“: $sin\frac{5\pi}{6}=sin(\pi-\frac{\pi}{6})$; დასახელება არ იცვლება, ნიშანი დადებითია (კუთხე $\frac{5\pi}{6}$ II მეოთხედშია); მაშასადამე, ვირჩევთ: $sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

კალკულატორის გამოყენების შესახებ თეორიულ ნაწილში წარმოდგენილი მაგალითი ეხმარება მოსწავლეებს (18) ამოცანის ამოხსნაში.

(17) ვ) ამოცანაში გასათვალისწინებელია, რომ $t=3\approx3\cdot57^0=171^0$, $t=3$ რადიანის ტოლი კუთხე მეორე მეოთხედის კუთხეა, $sin3>0$, $cos3<0$, $tg3<0$.

(19) $tg\alpha$ არ არის განსაზღვრული $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ რიცხვებისთვის.

თუ $\pi\leq\alpha\leq2\pi$, მაშინ $\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}\}$ სიმრავლიდან ამ პირობას აკმაყოფილებს $\frac{\pi}{2}+\pi$ რიცხვი, $\alpha=\frac{3\pi}{2}$.

(20) 3) $cost=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; კოსინუსი უარყოფითია, მაგალითად, II მეოთხედში.

$cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos(\pi-\frac{\pi}{6})=-cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ამრიგად, $cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

კოსინუსი უარყოფითია III მეოთხედშიც, $cos(\pi+\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; მაშასადამე, t შეიძლება იყოს: $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$.

(21) $sin^2t+cos^2t=1$; $cos^2t=1-\frac{16}{25}$; $cos^2t=\frac{9}{25}$, რადგან $\frac{\pi}{2}<t<\pi$, $cost<0$, $cost=-\frac{3}{5}$.

(22) დ) $y(x)=sinx+cosx$,

$y(-x)=-sinx+cosx$,

არც ლუწია და არც კენტი.

ვ) $y(x)=(x^2-1)cosx$,

$y(-x)=((-x)^2-1)cos(-x)=(x^2-1)cosx$,

$y(x)$ ლუწი ფუნქციაა.

აქ მოსწავლეებმა შეიძლება გაითვალისწინონ: ლუწი ფუნქციების ჯამიცა და ნამრავლიც ლუწია; კენტი ფუნქციების ნამრავლი ლუწი ფუნქციაა; კენტი და ლუწი ფუნქციების ნამრავლი კენტი ფუნქციაა. შეიძლება კლასში ამ დებულებების განხილვა და დასაბუთება.

(24) 1 (რად) $\approx 57^0$, $57^0>1^0$,

$tg1-tg1^0>0$ (ტანგენსი I მეოთხედში ზრდადია).

(25) ამ ამოცანის ამოხსნისას მოსწავლეები ითვალისწინებენ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მონოტონურობის შუალედებს; მაგალითად, II მეოთხედში კოსინუსი კლებადი ფუნქციაა, $cos\frac{6\pi}{7}<cos\frac{5\pi}{6}$ (ზ) დავალება); ტანგენსი IV მეოთხედში ზრდადი ფუნქციაა $tg(-\frac{\pi}{3})<tg(-\frac{\pi}{6})$ (კ) დავალება).

(26) აქ გასათვალისწინებელია, რომ $cos1<1$, $sin2<1$,

2 რადიანი II მეოთხედის კუთხეა, $tg2<0$, $tg2<1$.

$tg\frac{\pi}{8}\approx tg\frac{3,14}{8}\approx tg0,39<tg0,8$, რადგან $\frac{\pi}{8}$ და 0,8 I მეოთხედის კუთხეებია და I მეოთხედში ტანგენსი ზრდადია.

(27) უნდა დავადგინოთ დასახელებული კუთხეები რომელი მეოთხედებისაა.

მაგალითად, გ) $-1986^0=(-5)\cdot360^0-186^0$ — II მეოთხედი, $tg(-1986^0)<0$;

$2007^0=5\cdot360^0+207^0$ — III მეოთხედი, $cos2007^0<0$;

$-2006^0=(-5)\cdot360^0-206^0$ — II მეოთხედი, $sin(-2006^0)>0$; ნამრავლი დადებითია.

დ) $sin\frac{135\pi}{3}cos(-\frac{128\pi}{6})tg\frac{247\pi}{5}=0$, რადგან $sin\frac{135\pi}{3}=sin(45\pi)=sin\pi=0$.

(28) ბ) $16sin\frac{\pi}{6}cos\frac{\pi}{3}tg\frac{4\pi}{3}tg\frac{\pi}{3}=16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}=12$.

(29) ვიყენებთ დაყვანის ფორმულებს; მაგალითად, ბ) ამოცანაში:

$$tg(270^0-\alpha)=\frac{sin(270-\alpha)}{cos(270-\alpha)}=\frac{-cos\alpha}{-sin\alpha}=\frac{1}{tg\alpha};$$

$$sin130^0=sin(90^0+40^0)=cos40^0,\quad cos320^0=cos40^0,\quad sin270^0=-1,$$

$$tg(180^0-\alpha)=-tg\alpha,\quad cos50^0=sin40^0,\quad sin220^0=sin(180^0+40^0)=-sin40^0,\quad cos360^0=1.$$

ამრიგად, მივიღებთ:

$$\frac{\frac{1}{tg\alpha}\cdot\cos40^0\cdot\cos40^0\cdot(-1)\cdot(-tg\alpha)}{sin\,40^0\cdot(-sin\,40^0)\cdot1}=-\frac{cos^2 40^0}{sin^2 40^0}=-\frac{1}{tg^2 40^0}$$

მასწავლებელმა გაითვალისწინოს, რომ სტანდარტის შესაბამისად, მხოლოდ სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი განიხილება; ამიტომ „კოტანგენსის“ ნაცვლად გვექნება ხოლმე — $\frac{1}{tg\alpha}$.

(30) ამ ამოცანის მიხედვით, მოსწავლეები მსჯელობენ, რომ დაყვანის ფორმულის გამოყენებით, ყოველთვის შეიძლება $[0;\ \frac{\pi}{4}]$-ში მოთავსებული არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციაზე „გადასვლა“; მაგალითად,

$cos600^0=cos(600^0-360^0)=cos240^0=cos(270^0-30^0)=-sin30^0=-sin\frac{\pi}{6}$.

საშინაო დავალების ამოცანების ამოხსნებიც თეორიული მასალის ცოდნას ეყრდნობა; ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნები მეოთხედების მიხედვით, ლუწობა და კენტობა, პერიოდულობა, დაყვანის ფორმულები, ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მონოტონურობა — ამ საკითხების შესახებ ცოდნის გამოყენებით, ადვილად ამოიხსნება ყველა ამოცანა.

შემაჯამებელი წერა №1

თემა: პერიოდული პროცესები და პერიოდული ფუნქციები, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

საამიზნე ცნებები: სიდიდეები, შესაბამისობა, ფუნქცია (სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება), გრაფიკი.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით (მათ.საშ.1); ალგებრულ გამოსახულებათა შორის კავშირის დამყარება, ფუნქციის გამოყენება სხვადასხვა კონტექსტში ცვლილებათა გასაანალიზებლად და რეალური მოვლენის მოდელირებისთვის (მათ.საშ.2; მათ.საშ.3).

ამოცანების ნიმუშები:

1 შეადარეთ $sin200^0cos170^0tg20^0tg120^0$ გამოსახულების მნიშვნელობა 0-ს, პასუხი დაასაბუთეთ.

2 ჩამოთვლილთაგან რომელია ლუწი ფუნქცია, რომელი — კენტი, რომელი — არც ლუწი და არც კენტი.

ა) $y=2sin4x$; ბ) $y=\frac{2sin4x}{x}$; გ) $y=\frac{2sin4x}{x-1}$; დ) $y=\frac{2sin4x}{x^2}$; ე) $y=\frac{2sin4x}{x^2-1}$?

3 ცნობილია, რომ $sint=-0,6$ და $\frac{3\pi}{2}\leq t\leq 2\pi$. იპოვეთ $cost$ და tgt.

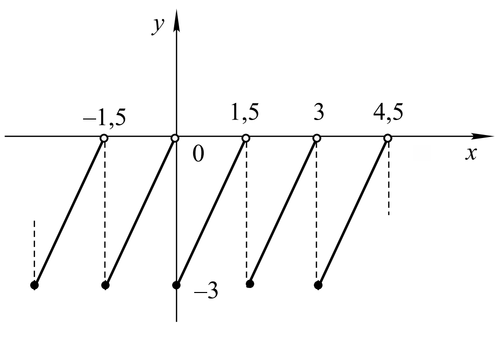
4 გაამარტივეთ: $cos^2(\frac{3\pi}{2}-\alpha)+cos^2(2\pi+\alpha)-sin^2(\frac{29\pi}{6})$.

5 იპოვეთ $(sin\frac{31\pi}{6}-cos\frac{23\pi}{3})tg\frac{19\pi}{4}$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

6 IV მეოთხედის $A(0,5;\ y_0)$ წერტილი ძევს ერთეულოვან წრეწირზე, რომლის ცენტრი $O(0;\ 0)$ წერტილია. $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნების შედეგად A წერტილი აისახა B წერტილზე. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები და MOB კუთხის რადიანული ზომა, თუ M წერტილის კოორდინატებია (1; 0).

7 ცნობილია, რომ $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულია T=1,5 პერიოდით და [0; 1,5) შუალედში $f(x)=2x-3$. წარმოადგინეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი და გამოთვალეთ $f(1)+f(10,2)+f(-5)$.

პასუხები: 1 <0. 2 ლუწია ბ); კენტია ა), დ), ე); არც ლუწია, არც კენტი გ). 3 0,8; −0,75. 4 $cos^2\frac{29\pi}{6}=cos^2(5\pi-\frac{\pi}{6})=cos^2\frac{\pi}{6}=0,75$. 5 1. 6 $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2})$; $\angle MOB=\frac{\pi}{6}$. 7 −2,6.



მითითება. 6 A ძევს ერთეულოვან წრეწირზე, ამიტომ $0{,}5^2+y_0^2=1$. რადგან A წერტილი IV მეოთხედშია, ამიტომ $y_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2})$, $\angle MOB=\frac{\pi}{6}$.

7 $f(1)=2\cdot1-3=-1$; $f(10{,}2)=f(10{,}2-1{,}5\cdot6)=f(1{,}2)=-0{,}6$; $f(-5)=f(-5+4\cdot1{,}5)=f(1)=-1$.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა:

1 თანამამრავლებიდან ზოგიერთის ნიშნის განსაზღვრა შეფასდეს 0,5 ქულით, მთლიანი გამოსახულების ნიშნის განსაზღვრა — 1 ქულით.

2 ორი მაინც ფუნქციის ლუწ-კენტოვნების დადგენა შეფასდეს 0,5 ქულით, ყველას დადგენა — 1 ქულით.

3 დავალების სწორად შესრულება შეფასდეს 1 ქულით, მცირე ხარვეზების შემთხვევაში — 0,5 ქულით.

4 0,5 ქულით შეფასდეს გამოსახულების პირველი ორი შესაკრების ჯამის 1-თან ტოლობის დადგენა; საბოლოო სახემდე მიყვანა. შეფასდეს 1 ქულით.

5 გამოსახულებაში ფუნქციათა პერიოდულობის გათვალისწინებით კუთხეთა დაყვანის ფორმულების გამოსაყენებლად ხელსაყრელი ფორმით წარმოდგენა შეფასდეს 1 ქულით; დაყვანის ფორმულების გამოყენება — 0,5 ქულით, გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობის მიღება — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

6 y_0-ის პოვნა შეფასდეს 1 ქულით, B წერტილის კოორდინატების დადგენა — 0,5 ქულით, კიდევ 0,5 ქულით შეფასდეს MOB კუთხის რადიანული ზომის დადგენა. სულ — 2 ქულა.

7 ფუნქციის გრაფიკის აგება შეფასდეს 1 ქულით, გამოსახულების მნიშვნელობის პოვნა — კიდევ 1 ქულით. სულ — 2 ქულა.

კიდევ ერთხელ აღვნიშნავთ შემაჯამებელი წერის შედეგების განხილვის მნიშვნელობას. განმსაზღვრელი შეფასების შემდეგ, ცოდნის გაღრმავებისა და გამყარების მიზნით, ისევე, როგორც ყველა აკადემიური აქტივობის დროს, მივმართავთ განმავითარებელ შეფასებას. ეს მოგვცემს შესაძლებლობას მოვისმინოთ მოსწავლეთა მოსაზრებები შემაჯამებელი წერის საკითხებზე, მათი ამოხსნის გზებზე, სირთულის დონეზე, განმსაზღვრელი შეფასებების ობიექტურობის აღიარებაზე მოსწავლეთა მიერ, მათთვის ბუნდოვანი და რთული საკითხების დაძლევის გზებზე — რა მიდგომებით შევძლებთ შენიშნული ხარვეზების გამოსწორებას, რა მიღწევები წარმოჩინდა და როგორ გავამყაროთ ისინი. განმავითარებელმა შეფასებამ უნდა იტვირთოს ამ საკითხთა კლასში საჯარო განხილვა.

1 ამოცანის განხილვისას კიდევ ერთხელ, მოსწავლეთა აქტიური ჩართულობით, გაიხსენეთ *sin*, *cos* და *tg* ფუნქციების განსაზღვრებები, მათი მნიშვნელობები ზოგიერთი გამორჩეული მახვილი კუთხის შემთხვევაში; გამორჩეული ყურადღება დაუთმეთ დაყ-

ვანის ფორმულებს, სათანადო წესს; ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნიშნებს საკოორდინატო მეოთხედებში. შედეგიც არ დააყოვნებს — დაადგენენ მოცემული ნამრავლის ნიშანს.

2 ამოცანის განხილვამდე მიმართეთ მოსწავლეებს გაიხსენონ ლუწ და კენტ ფუნქციათა განსაზღვრებები, მოსწავლეები ხშირად მიმართავენ ხოლმე მხოლოდ $f(-x)$-ის კვლევას და არ აქცევენ ყურადღებას განსაზღვრის არის სიმეტრიულობას. მაგალითად, $f(x)=x^2+1$ ლუწი ფუნქციაა, მაგრამ $f(x)=x^2+1$, $x\in[0;\ +\infty)$ არც ლუწია და არც კენტი. ყურადღებით მოისმინეთ მოსწავლეთა მოსაზრებები ჩამოთვლილ ფუნქციათა ლუწ-კენტოვნების შესახებ.

3 ამოცანის განხილვისას ხაზგასმით წარმოაჩინეთ ძირითად ტრიგონომეტრიულ იგივეობათა მნიშვნელობა — მათი დახმარებით შესაძლებელი ხდება ერთი რაიმე ფუნქციის მიხედვით დადგინდეს სხვა ფუნქციათა მნიშვნელობები, აქვე განიხილეთ ნიშნების შერჩევის საკითხიც საკოორდინატო მეოთხედების მიხედვით; კიდევ ერთხელ ისაუბრეთ საჯაროდ კუთხის რადიანული და გრადუსული ზომების შესახებ.

4 და 5 ამოცანების განხილვისას, ფუნქციათა გამარტივებისას, წარმოჩინდება დასახელებულ ფუნქციებს შორის ცნობილი კავშირების აქტუალურობა. კიდევ ერთხელ მოუწევს კლასს დაყვანის ფორმულებისა და მათთან დაკავშირებული წესის, აგრეთვე ზოგიერთი კუთხის შემთხვევაში ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა გახსენება.

6 ამოცანის განხილვა უკავშირდება მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას, მასში წარმოდგენილ წრეწირს, წრეწირზე მდებარე წერტილს, ასახვას — სიბრტყის დადებითი კუთხით მობრუნებას სათავის გარშემო, მოცემული წერტილის სახეს ამ ასახვისას, კუთხეთა რადიანულ ზომებს. ამიტომ მოგიწევთ ყურადღებით, ინტერაქტიულ რეჟიმში განიხილოთ ეს საკითხები — ისინი მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ სხვა საკითხების კვლევაშიც.

7 ამოცანის შინაარსის ყველა დეტალი მთელი კლასის შემოქმედებითი ჩართულობით უნდა განიხილებოდეს. მხოლოდ ასეთი მიდგომით შეძლებს კლასი მითითებული გრაფიკის აგებას. მეორე სირთულე ამ ამოცანაში ფუნქციის მნიშვნელობათა დადგენას უკავშირდება, რაც პერიოდული ფუნქციის მკაფიოდ აღქმის გარეშე შეუძლებელია. ამ განხილვაში წამყვანი როლი მაღალი მზაობის მოსწავლეებს დააკისრეთ. ისინი არა მარტო საკითხის გადაჭრას, არამედ თავისი ნააზრევის სხვებისთვის გადაცემის ხელოვნებასაც უნდა ეუფლებოდნენ.

როგორც ყოველი განმავითარებელი შეფასება, ეს შეფასებაც მკაფიო წარმოდგენას შეგიქმნით აღნიშნულ საკითხებში მოსწავლეთა ცოდნის დონისა და მათი უნარების შესახებ. ამ შეფასების დროს გაკეთებული თქვენი ჩანაწერები რეალური ვითარების შესახებ კარგ სამსახურს გაგიწევთ კლასში შემდგომი მუშაობის დაგეგმვისას.

ახლა ბოლო აქტივობის მიხედვით წარმოგიდგენთ სოლო ტაქსონომიის აკადემიური მიღწევების დონეებს დაკონკრეტებული ფორმით.

1. პრესტრუქტურული დონე. არ იცნობს (ან იცნობს ძალიან ბუნდოვნად) ფუნქციის ცნებას, მით უმეტეს ლუწ და კენტ, პერიოდულ ფუნქციათა ცნებებს, საკოორდინატო სიბრტყისა და გეომეტრიული გარდაქმნების ცნებებს. ვერ აყალიბებს მკაფიოდ ამოცანათა პირობებს.

2. უნისტრუქტურული დონე. მოსწავლე იცნობს *sin*, *cos* და *tg* ფუნქციათა განსაზღვრებებს მახვილი კუთხის შემთხვევაში, თუმცა ზოგად განსაზღვრებაზე არამკაფიო წარმოდგენა აქვს; უჭირს ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა, დაყვანის ფორმულის გამოყენება. ზოგჯერ წარმატებით ახერხებს კუთხის რადიანული და გრადუსული ზომების დაკავშირებას; ერთვება ფუნქციის გრაფიკის აგების პროცესში, თუმცა მხოლოდ ფრაგმენტულად.

3. მულტისტრუქტურული დონე. მოსწავლე ერთვება ყველა საკითხის განხილვაში, თუმცა მათ ბოლომდე მიყვანას ზოგჯერ ვერ ახერხებს. იცნობს განხილულ ცნებებს, იყენებს დაყვანის ფორმულებს და ახერხებს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობების გამოთვლას. მისთვის უცხო არ არის ფუნქციის გრაფიკის აგების თემა, თუმცა მოცემული პერიოდული ფუნქციის გრაფიკის აგების დასრულება დამოუკიდებლად ვერ შეძლო.

4. მიმართებითი დონე. მოსწავლემ კარგად გაართვა თავი შემაჯამებელი წერის დავალებებს; ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების გამოყენებით, მათი მნიშვნელობების გამოთვლით ამოხსნა ამოცანები. ზოგად პრინციპებს კარგად უსადაგებს კონკრეტულ ამოცანებს და აწარმოებს კვლევას, ანალიზს. მის მიერ მიღებული შედეგები სარწმუნოა.

5. გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. მოსწავლე ყოველი ამოცანის ამოხსნისას ავლენს საკითხის ღრმა ცოდნას და იგრძნობა რომ ის უფრო რთული დავალებების გადაჭრასაც წარმატებით გაართმევდა თავს, კერძოდ, უფრო რთული პერიოდული ფუნქციის გრაფიკსაც ააგებდა. მნიშვნელოვანია, რომ მისი ამოხსნის სტილი არის მკაფიო, მკაცრად სტრუქტურირებული, იძლევა ამოცანის ამოხსნის სხვადასხვა გზას და ახდენს მათ შედარებით ანალიზს. თვალს ადევნებს მსმენელთა რეაქციას მის მსჯელობაზე და ადეკვატურად რეაგირებს ყოველ გამოხმაურებაზე.

1.4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკები

საშინაო დავალების განხილვისას, ყურადღებას ვამახვილებთ ამოცანებზე, რომლებიც ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების ცოდნას უკავშირდება. ამ ცოდნას ახალი მასალის ახსნა ეყრდნობა.

მოსწავლეებს ვთხოვოთ, ჩამოაყალიბონ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ყველა თვისება. ვიწყებთ სინუსით; მოსწავლეები ასახელებენ განსაზღვრის არეს, მნიშვნელობათა სიმრავლეს, უთითებენ თვისებებს: კენტობას (კოსინუსის შემთხვევაში, ლუწობას), პერიოდულობას. ყველა ამ თვისების გათვალისწინებით, აიგება შესაბამისი გრაფიკი. გვეხმარება ერთეულოვანი წრეწირი და მასზე აღებული P_t წერტილები, რომლებსაც არგუმენტის t მნიშვნელობებს ვუთანადებთ და, ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით, ადვილად ვპოულობთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობას — მიმდინარეობს წრეწირის წერტილების „გადატანა“ რიცხვით წრფეზე; ამასთანავე, ვიწყებთ $[0;\ 2\pi]$ შუალედით და ამ შუალედის 16 ტოლ ნაწილად დაყოფის შედეგად მიღებული წერტილების ორდინატები იძლევა სინუსის მნიშვნელობებს. განტოლების ამოხსნის პროცესი, რომელიც სამიზნე ცნებას უკავშირდება, აღიწერება დეტალურად, მოსწავლეთათვის გასაგები მეთოდით. ეს პროცესი უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამონახსნთა სიმრავლის გააზრების კარგი წინაპირობაა.

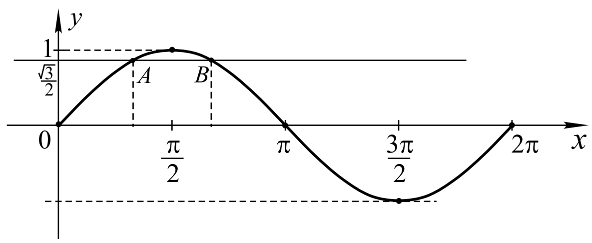
მნიშვნელოვანია ე. წ. საკვანძო წერტილების გამოყოფა — მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილები, ნულები — გრაფიკის გააზრებისთვის მნიშვნელოვანი მომენტებია. მასწავლებლის დახმარებით, მოსწავლეები იხსენებენ ფუნქციის შესაბამის თვისებებს — ზრდადობასა და კლებადობას, მაქსიმუმისა და მინიმუმის (ექსტრემუმის) წერტილებს, ნულებს. მასწავლებელი, „ს“ (სხვადასხვა) რუბრიკის გამოყენებით, აცნობს მოსწავლეებს კიდევ სამ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციას, რომლებიც სინუსის, კოსინუსისა და ტანგენსის საშუალებით განისაზღვრება.

„ტესტებზე“ პასუხების შერჩევა მოითხოვს გრაფიკების წარმოდგენას და შესაბამისი თვისებების ცოდნას.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

5) Oy ღერძიდან $\frac{5\pi}{6}$-ით დაშორებული წერტილების აბსცისებია $\frac{5\pi}{6}$ და $-\frac{5\pi}{6}$; $sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $sin(-\frac{5\pi}{6})=-\frac{1}{2}$. საძიებელი წერტილებია: $(\frac{5\pi}{6};\ \frac{1}{2})$ და $(-\frac{5\pi}{6};\ -\frac{1}{2})$.

6) ვთქვათ, სინუსოიდას $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილებია A და B; მაშინ, ცხადია, $A=(t_1;\ \frac{\sqrt{3}}{2})$, სადაც $0<t_1<\frac{\pi}{2}$. მაშასადამე, $t_1=\frac{\pi}{3}$, რადგან $sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $B=(t_2;\ \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\frac{\pi}{2}<t_2<\pi$, რადგან $0<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$, ამიტომ $\frac{\pi}{2}<\pi-\frac{\pi}{3}<\pi$ და $sin(\pi-\frac{\pi}{3})=sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; მაშასადამე, $t_2=\frac{2\pi}{3}$.



7 ვიყენებთ $y=sinx$ ფუნქციის გრაფიკს და წინა ამოცანის ამოხსნისას ჩატარებულ მსჯელობას: გვაქვს ორი ფესვი, $x_1=\frac{\pi}{4}$ და $x_2=\frac{3\pi}{4}$. 7-9 ამოცანები შეიძლება მოსწავლეებს დამოუკიდებელ სამუშაოდ შევთავაზოთ და ამოხსნათა ანალიზი განმავითარებელი შეფასების განსახორციელებლად გამოვიყენოთ.

7-9 ამოცანების ამოხსნისას მოსწავლეები იყენებენ $y=sinx$-ისა და $y=cosx$-ის გრაფიკებს.

8 ამოცანის ამოხსნა იწყება წინა ორი ამოცანის მსჯელობის გამეორებით, შედეგად, ვიღებთ x-ის ორ მნიშვნელობას: $x_1=\frac{\pi}{6}$ და $x_2=\frac{5\pi}{6}$. შემდეგ ვიყენებთ პერიოდულობას და წარმოვადგენთ x-ის ყველა მნიშვნელობას ორი სახით:

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$$

$$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

არ არის აუცილებელი ამ ორი ფორმულის ერთი ფორმულით წარმოდგენა.

10 $y=a$ წრფე a-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის კვეთს $y=tgx$ ფუნქციის გრაფიკს.

11 ვიყენებთ $y=cosx$ ფუნქციის გრაფიკს; $y=\frac{1}{2}$ წრფე გრაფიკის იმ ნაწილს, რომელიც $[-\pi;\ \pi]$ შუალედს შეესაბამება, ორ წერტილში კვეთს, მათი აბსცისებია: $x_1=\frac{\pi}{3}$ და $x_2=-\frac{\pi}{3}$.

მაშასადამე, პერიოდულობის გათვალისწინებით, ყველა ის x რიცხვი, რომლის კოსინუსი $\frac{1}{2}$-ია, ასე ჩაიწერება: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

12 მოსწავლეებს გავახსენებთ, რომ გადაკვეთის წერტილების აბსცისებია: $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{5\pi}{6}$; გრაფიკიდან კარგად ჩანს, რომ ამ რიცხვებს შორის მდებარე ნებისმიერი რიცხვისთვის გვაქვს: $sinx>\frac{1}{2}$. ანუ, $[0;\ 2\pi]$ შუალედში x-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $sinx>\frac{1}{2}$, მოიცემა პირობით: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}$. პერიოდულობის გათვალისწინებით, x-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ჭეშმარიტია $sinx>\frac{1}{2}$ უტოლობა, მოიცემა ფორმულით: $\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. მოსწავლეები უთითებენ შესაბამის ინტერვალებს გრაფიკზე.

13 გრაფიკიდან ჩანს, რომ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ წრფისა და $y=sinx$ ფუნქციის გრაფიკების გადაკვეთის იმ წერტილების აბსცისები, რომლებიც $[\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}]$ შუალედშია, არის $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ და $\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$; $sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})=cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $sin(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

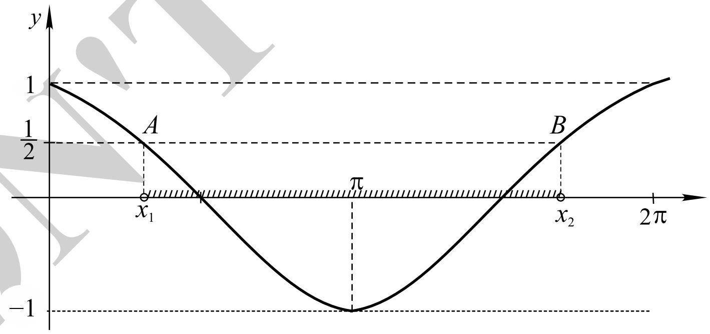
მაშასადამე, $sinx<\frac{\sqrt{2}}{2}$, როცა x ეკუთვნის შუალედს: $(\frac{3\pi}{4};\ \frac{9\pi}{4})$. პერიოდულობის გათვალისწინებით, $sinx<\frac{\sqrt{2}}{2}$ უტოლობა სრულდება x-ის ყველა მნიშვნელობისთვის, რომლებიც ეკუთვნის შუალედებს $(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{9\pi}{4}+2\pi n)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

(14) გრაფიკიდან ჩანს, რომ $cosx>\frac{1}{2}$ x-ის იმ მნიშვნელობებისთვის $[-\pi;\ \pi]$ შუალედიდან, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$. გავითვალისწინოთ, რომ $y=\frac{1}{2}$ კვეთს $y=cosx$-ის გრაფიკს $[-\pi;\ \pi]$ შუალედში, როცა $x=-\frac{\pi}{3}$ და $x=\frac{\pi}{3}$:

$$cos(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2};\ cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

პერიოდულობის გათვალისწინებით, x-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $cosx>\frac{1}{2}$, მოიცემა პირობით: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

(15) ამ ამოცანის ამოხსნისას ვიყენებთ სურათს:



$y=\frac{1}{2}$ წრფე $y=cosx$-ის გრაფიკს A და B წერტილებზე კვეთს, ამ წერტილების აბსცისებია, შესაბამისად, $x_1=\frac{\pi}{3}$ და $x_2=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$, რადგან $cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$.

მაშასადამე, $[0;\ 2\pi]$ შუალედში $cosx<\frac{1}{2}$, როცა $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$; უტოლობის ყველა ამონახსნი ასე წარმოიდგინება

$$\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

თუ კლასში დაწვრილებით ამოვხსნით ყველა ამოცანას, მაშინ მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ საშინაო დავალების შესრულება, გრაფიკების გააზრება, გრაფიკების გამოყენება განტოლებებისა და უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეების დასადგენად. სასურველია, ეს ამოცანებიც დაწვრილებით გავარჩიოთ და განმავითარებელი შეფასების განსახორციელებლად გამოვიყენოთ.

ამ პარაგრაფის კარგად შესწავლით, საფუძველი ეყრება უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამონახსნთა სიმრავლეების გააზრებას.

1.5. ტრიგონომეტრიული განტოლებები

წინარე ცოდნის გააქტიურება საშინაო დავალების შემოწმების პარალელურად მიმდინარეობს; განხილულია უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების კერძო შემთხვევები. ნებისმიერი უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლების განხილვა ერთნაირი სქემით მიმდინარეობს — ვიყენებთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკებს და ფორმულების მიღების გრაფიკულ მეთოდს; მაგალითად, $sinx=m$ განტოლების ამოხსნას ვუკაშირებთ $y=m$ და $y=sinx$ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების პოვნას. სამწუხაროდ, სკოლაში დამკვიდრდა ტრიგონომეტრიული განტოლების განხილვის არასწორი ტენდენცია — იწერებოდა ტრიგონომეტრიული განტოლება, მაგალითად, $sinx=m$, შემდეგ — ყველა ამონახსნთა ფორმულა: $x=(-1)^k arcsinm+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; ეს ფორმულა ყოველგვარი დასაბუთების გარეშე იწერებოდა, შემდეგ განიხილებოდა სხვადასხვა ტიპის ტრიგონომეტრიული განტოლება და მისი ამოხსნის ხერხი. საგანმანათლებლო სტანდარტისა და ერთიანი ეროვნული გამოცდების მოთხოვნები არ ითვალისწინებს უმარტივესისგან განსხვავებული ტიპის განტოლების განხილვას, რადგან სკოლაში ბევრი ახალი, იდეურად უფრო მდიდარი მასალა შემოვიდა. სამწუხაროდ, ზოგიერთი მასწავლებელი თვითნებურად ამცირებს გეომეტრიული გარდაქმნების, ალბათობისა და სტატისტიკის, ლოგიკისა და სიმრავლეთა თეორიის განხილვისთვის განკუთვნილ დროს და მეტ დროს უთმობს სხვადასხვა ტიპის ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნის „მეთოდების" შესწავლას (ე. წ. ერთგვაროვანი, ერთ ფუნქციაზე დაყვანადი, ჯამის ნამრავლად და ნამრავლის ჯამად გადასაქცევი ფორმულების გამოყენების). მასწავლებლებსაც სასერტიფიკაციო გამოცდებზე უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების განხილვა იმ სახით მოეთხოვებათ, რა სახითაცაა წარმოდგენილი ეს თემა ჩვენ სახელმძღვანელოში.

მნიშვნელოვანია $arcsinm$, $arccosm$ და $arctgm$ რიცხვების კარგად გააზრება; ამ საკითხს ჩვენ X კლასშიც შევეხეთ, როცა მხოლოდ მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს განვიხილავდით.

„ტესტებითა" და ამოცანებით განვიმტკიცებთ ცოდნას უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის შესახებ.

ამოცანების ნაწილი $arcsinm$, $arccosm$ და $arctgm$ რიცხვების გამოთვლებს უკავშირდება.

კლასში ვასაბუთებთ $arcsinm$-ისა და $arccosm$-ის მნიშვნელოვან თვისებებს (დავალება 5):

$$arcsin(-m)=-arcsinm \text{ და } arccos(-m)=\pi-arccosm.$$

თუ ავღნიშნავთ: $arcsin(-m)=\alpha$; $-arcsinm=\beta$; მაშინ მოსწავლე ადვილად გაიაზრებს მსჯელობას: $sin\alpha=-m$; $sin(-\beta)=m$, საიდანაც $sin\beta=-m$; ამრიგად $sin\alpha=sin\beta$.

ამასთანავე, $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$.

რადგან $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$ შუალედში ყოველ მნიშვნელობას -1-დან 1-მდე სინუსი ერთხელ იღებს (ამ შუალედში სინუსი ზრდადია), ამიტომ $\alpha=\beta$; $arcsin(-m)=-arcsinm$.

ანალოგიურად, თუ $arccom(-m)=\alpha$; $\pi-arccosm=\beta$, მაშინ $cos\alpha=-m$, $cos\beta=cos(\pi-arccosm)=$ $=-cos(arccosm)=-m$.

ამრიგად $cos\alpha=cos\beta$.

გარდა ამისა, $0 \le \alpha \le \pi$; $0 \le \beta \le \pi$. ამიტომ $\alpha=\beta$, რადგან $[0; \pi]$ შუალედში კოსინუსი კლებადია და ყოველ მნიშვნელობას ერთხელ იღებს.

(6) ეს ამოცანა წინა ამოცანის ანალოგიურად იხსნება; ვითვალისწინებთ *arctg*-ის განსაზღვრებას და ტანგენსის ზრდადობას $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ შუალედში.

$$tg(arctg(-m))=-m;$$
$$tg(-arctgm)=-m.$$
$$-\frac{\pi}{2}<arctg(-m)<\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}<-arctgm<\frac{\pi}{2};$$

ამიტომ

$$arctg(-m)=-arctgm.$$

(7)-(9) ამოცანებში მოსწავლეები ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილებსა და (5) და (6) ამოცანების შედეგებს იყენებენ. მაგალითად,

$arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\pi-arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ (ამოცანა (8));

$arctg(-1)=-arctg1=-\frac{\pi}{4}$ (ამოცანა (9)).

(10) ვითვალისწინებთ, რომ *arcsinm* და *arccosm* რიცხვები არ არის განსაზღვრული, როცა $|m|>1$; მაგალითად, არ აქვს აზრი: $arcsin\pi$-ს, $arcsin1{,}6$-ს.

(11) ამოცანა (7)-(9) ამოცანების ანალოგიურია.

(12) დ) ვთქვათ, $arcsin\frac{\pi}{12}=\alpha$, მაშინ $sin\alpha=\frac{\pi}{12}$ და $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$; $cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}$.

(13) ბ) ვთქვათ, $arcsin(-0{,}8)=\alpha$, მაშინ $sin\alpha=-0{,}8$ და $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. $cos\alpha=\sqrt{1-(-0{,}8)^2}=0{,}6$; $tg\alpha=-\frac{4}{3}$.

(14) დ) ვთქვათ, $arcsin(3\sqrt{5})$, მაშინ $sin\alpha=\sqrt{1-(3-\sqrt{5})^2}=\sqrt{6\sqrt{5}-13}$.

(16) ვთქვათ,

ა) $arccos(cos\frac{\pi}{7})=\alpha$, მაშინ $cos\alpha=sin\frac{\pi}{7}$ და $\alpha\in[0; \frac{\pi}{2}]$ ამრიგად $\alpha=\frac{\pi}{7}$;

ბ) $arccos(-cos\frac{\pi}{7})=\alpha$, მაშინ $cos\alpha=-cos\frac{\pi}{7}$ და $\alpha\in[\frac{\pi}{2}; \pi]$ ამრიგად $\alpha=\pi-\frac{\pi}{7}=\frac{6\pi}{7}$;

გ) $arccos(-x)\in[0; \pi]$, $\pi-arccosx\in[0; \pi]$, ამასთანავე $cos(arccos(-x))=-x$, $cos(\pi-arccosx)=-cosarccosx=-x$. ამრიგად, მოცემულ კუთხეთა კოსინუსები ტოლია და კუთხეები ეკუთვნის $[0; \pi]$ შუალედს. მაშასადამე, ეს კუთხეები ტოლია.

(17) ა) ვთქვათ, $arccos(cos6)=\alpha$, მაშინ $cos\alpha=cos6$ და $\alpha\in[0; \pi]$,
ამიტომ $cos\alpha=cos(6-2\pi)=cos(2\pi-6)$, $\alpha=2\pi-6$.

(19) გავითვალისწინოთ, რომ $arctga\in\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. ა) შემთხვევაში $arctg\frac{5}{12}\in\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ და

ა) $tg\alpha=\frac{5}{12}$, $cos\alpha=\frac{12}{13}$, $sin\alpha=\frac{5}{13}$;

ბ) შემთხვევაში $arctg(-0{,}75)\in\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ და $tg\alpha=-0{,}75=-\frac{3}{4}$, $cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{4}{5}$, $sin\alpha=-\frac{3}{5}$;

გ) შემთხვევაში $arctg(-3\pi)\in\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ და $tg\alpha=-3\pi$, $cos^2\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+9\pi^2}}$, $sin\alpha=-\frac{3\pi}{\sqrt{1+9\pi^2}}$.

(20) $arctg\in\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\pi-arctg\in\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. ამ კუთხეთა ტანგენსები ტოლია ($-x$-ის). ამრიგად, ეს კუთხეებიც ტოლია.

(21) $arctg(tg2)=\alpha$, საიდანაც $tg\alpha=tg2=tg(2-\pi)$ და რადგან $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ამიტომ $\alpha=2-\pi$.

△11 გ) ვთქვათ, $arccos\frac{\pi}{4}=\alpha$, $\alpha\in[0; \pi]$, ამრიგად $cos\alpha=\frac{\pi}{4}$, $sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}$.

△13 ბ) ვთქვათ, $arccos(-cos\frac{\pi}{8})=\alpha$, ამრიგად $cos\alpha=-cos\frac{\pi}{8}$ და $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

ამიტომ $\alpha=\pi-\frac{\pi}{8}=\frac{7\pi}{8}$.

△14 ა) ვთქვათ, $arccos(cos5)=\alpha$, $\alpha\in[0; \pi]$, ამრიგად $cos\alpha=cos5=cos(5-2\pi)=cos(2\pi-5)$ და $\alpha=2\pi-5$.

(21)-(28) ამოცანების ამოხსნისას, მოსწავლეები უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნების ფორმულებს იყენებენ.

(29) ამ ამოცანებში, ზოგიერთი მოსწავლე აღნიშვნას იყენებს, მაგალითად, $\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}=y$, იპოვის y-ს, შემდეგ x-ს. თუმცა, ამოხსნა შეიძლება ასეც ჩავატაროთ:

$$2sin(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4})=\sqrt{3};$$

$$sin(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}=arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k;$$

ან $$\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}=\pi-arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k;$$

$$-\frac{x}{4}=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+2\pi k;$$

ან $$-\frac{x}{4}=-\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi k.$$

პასუხი: $x=8\pi k$ ან $x=-\frac{4\pi}{3}+8\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

ზოგჯერ მოსწავლეებს სახელმძღვანელოს პასუხებში $8\pi k$-ს წინ ნიშანი „+“ შეცდომა ჰგონიათ. ყურადღება გავამახვილოთ იმ ფაქტზე, რომ $k\in Z$ და ის ღებულობს ყველა მთელ მნიშვნელობას.

(30) ა) $2cosx=a^2-1$.

განტოლებას ამონახსნი აქვს, როცა

$$-1\le\frac{a^2-1}{2}\le1;\quad -2\le a^2-1\le2;\quad -1\le a^2\le3;\quad a^2\le3;\quad |a|\le\sqrt{3};\quad -\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}.$$

ბ) $sinx=2a+1$ განტოლებას აქვს ამონახსნი, როცა
$|2a+1|\le1$.
$-1\le2a+1\le1,\ -2\le2a\le0,\ -1\le a\le0.$

გ) $tgx=\frac{a}{3}$; a ნებისმიერი რიცხვია.

დ) $sinx=\frac{a^2-1}{3}$;

$-3\le a^2-1\le3;\quad a^2\le4;\quad |a|\le2;\quad -2\le a\le2.$

(31) ა) $sin(x+\frac{\pi}{6})=-1$;

$x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in\boldsymbol{Z};$

$x=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in\boldsymbol{Z};$

$x=-\frac{2}{3}\pi+2\pi k;\ k\in\boldsymbol{Z}.$

თუ $k=1$, მივიღებთ: $x=\frac{4}{3}\pi$, ეს რიცხვი ეკუთვნის $(\pi;\ \frac{3\pi}{2})$ შუალედს. სასურველია, განვიხილოთ შემთხვევები:

$sinx=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in\boldsymbol{Z};$

$sinx=-1,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in\boldsymbol{Z};$

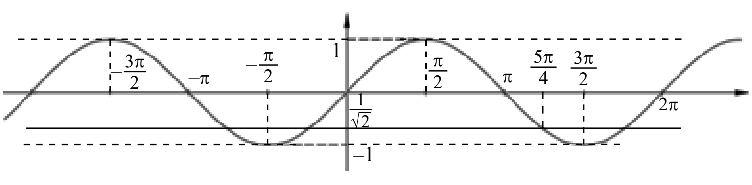
$cosx=0,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k;\ k\in\boldsymbol{Z}.$

გ) $2sin^2x=1;\quad sin^2x=\frac{1}{2},$

$sinx=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ან $sinx=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

შეიძლება გრაფიკი გამოვიყენოთ.

$[\pi;\ \frac{3\pi}{2}]$ შუალედში $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ და $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ წრფეებიდან მხოლოდ $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ წრფე კვეთს გრაფიკს; გადაკვეთის წერტილის აბსცისა არის: $x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$;



მართლაც, $sin\frac{5\pi}{4}=-sin\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

განტოლების ამოხსნა:

$sinx=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

$sinx=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

ანუ, $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

ამ ფორმულებიდანაც შეიძლება ვიპოვოთ საძიებელი რიცხვი მოცემული შუალედიდან.

დ) $sin^2x=cos^2x$

$|sinx|=|cosx|$;

ცხადია, $cos\neq0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში, $sinx=0$, რაც შეუძლებელია).

მაშასადამე, $|tgx|=1$, $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$.

$[0;\ \frac{\pi}{2}]$ შუალედს ეკუთვნის: $x=\frac{\pi}{4}$.

32 დასამტკიცებელია: $arcsinm=\frac{\pi}{2}-arccosm$;

ვთქვათ, $arcsinm=\alpha$, $arccosm=\beta$, მაშინ $sin\alpha=m$, $-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$; (1)

$cos\beta=m$, $0\leq\beta\leq\pi$; $-\frac{\pi}{2}\leq\frac{\pi}{2}-\beta\leq\frac{\pi}{2}$ (2)

$sin\alpha=m$; $sin(\frac{\pi}{2}-\beta)=cos\beta=m$.

ამრიგად, (1) და (2)-ის გათვალისწინებით $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$.

33 ა) ვთქვათ, $arccos(cos\frac{\pi}{6})=\alpha$,

მაშინ $cos(arccos(cos\frac{\pi}{6})=cos\alpha$,

$cos\frac{\pi}{6}=cos\alpha$;

რადგან $0\leq\alpha\leq\pi$, $0\leq\frac{\pi}{6}\leq\pi$;

ამიტომ $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

ბ) ანალოგიურად განიხილება.

გ) $arccos(sin\frac{\pi}{6})=arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$;

$\frac{\pi}{2}-arcsin(sin\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{2}-arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

34 ა) თუ $arcsin(sinm)=\alpha$, მაშინ $sin\alpha=sinm$; ამასთანავე, $-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$;

$\alpha=m$ ტოლობა სწორია, როცა $-\frac{\pi}{2}\leq m\leq\frac{\pi}{2}$.

ბ) თუ $arccos(cosm)=\alpha$; მაშინ $cos\alpha=cosm$, ამასთანავე, $0\leq\alpha\leq\pi$; $\alpha=m$ ტოლობა სწორია, როცა $0\leq m\leq\pi$.

35 ა) ვთქვათ, $arccos(cos2)=\alpha$, მაშინ $cos\alpha=cos2$, რადგან $0\leq\alpha\leq\pi$; $0\leq2\leq\pi$;
ამიტომ $\alpha=2$.
$arccos(cos2)=2$.

ბ) თუ $arccos(sin2)=\alpha$, მაშინ $0\leq\alpha\leq\pi$ და $cos\alpha=sin2$, $cos\alpha=cos(\frac{\pi}{2}-2)=cos(2-\frac{\pi}{2})$, მაშასადამე, $cos\alpha=cos(2-\frac{\pi}{2})$. $0\leq\alpha\leq\pi$; $0\leq2-\frac{\pi}{2}\leq\pi$; ამიტომ $\alpha=2-\frac{\pi}{2}$.

საშინაო დავალების 1 - 10 ამოცანებში მოსწავლეები იყენებენ უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის ფორმულებს: *arcsin*-ის, *arccos*-ისა და *arctg*-ის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობების ცხრილებსა და კლასში ამოხსნილ ამოცანებს.

22 ა) $4cosx=3a-1$; $cox=\frac{3a-1}{4}$;

$\left|\frac{3a-1}{4}\right|\leq1$; $-4\leq3a-1\leq4$; $-3\leq3a\leq5$;

$-1\leq a\leq\frac{5}{3}$.

დ) $3cosx-a^2+1=0$; $cosx=\frac{a^2-1}{3}$.

$-1\leq\frac{a^2-1}{3}\leq1$; $-3\leq a^2-1\leq3$; $-2\leq a^2\leq4$;

$-2\leq a\leq2$.

23 I. $cos(\frac{\pi}{3}-2x)=\frac{1}{2}$,

$\frac{\pi}{3}-2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$,

$-2x=2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ ან $-2x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$,

$x=\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ ან $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

ა) $x=\frac{\pi}{3}$; ბ) $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$; გ) $x=-\frac{2\pi}{3}$; $x=0$; $x=\frac{\pi}{3}$.

II. $sin(2x+\frac{\pi}{4})=-1$,

$2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$;

$2x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$;

$x=-\frac{3\pi}{8}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

ა) $\pi-\frac{3\pi}{8}=\frac{5\pi}{8}$; ბ) $\pi-\frac{3\pi}{8}=\frac{5\pi}{8}$; გ) $-\frac{3\pi}{8}$.

24 ა) $\alpha=arccos(cos20^0)$;

$cos\alpha=cos20^0$ და რადგან $0\le\alpha\le180^0$, $0\le20^0\le180^0$, ამიტომ $\alpha=20^0$.

ბ) $arccos(cos(-80^0))=arccos(cos80^0)=80^0$;

გ) $arccos(sin1,9)=\alpha$.

$0\le\alpha\le\pi$, $cos\alpha=sin(1,9)=cos(\frac{\pi}{2}-1,9)=cos(1,9-\frac{\pi}{2})$;

$0\le1,9-\frac{\pi}{2}\le\pi$,

ამიტომ $\alpha=1,9-\frac{\pi}{2}$.

დ) $\alpha=arccos(cos10)$;

$0\le\alpha\le\pi$, $cos\alpha=cos10=cos(4\pi-10)$; $0\le4\pi-10\le\pi$, ამიტომ $\alpha=4\pi-10$.

სასურველია, კლასში განვიხილოთ 19 ამოცანის დავალებების ამოხსნები და, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების გამოყენებით, ვიმსჯელოთ: რა შემთხვევაში გამომდინარეობს $sin\alpha=sin\beta$, ან $cos\alpha=cos\beta$ ტოლობებიდან ტოლობა: $\alpha=\beta$.

1.6. ჰარმონიული რხევები

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებებისა და გრაფიკების შესახებ ცოდნის შეჯამებას ვამთავრებთ ამ ფუნქციების პრაქტიკული გამოყენების მაგალითების განხილვით. რხევითი პროცესები, კერძოდ, ჰარმონიული რხევები ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით აღიწერება. მოსწავლეები, რხევითი პროცესების პერიოდულობის გათვალისწინებით, გაიაზრებენ, რატომ გამოიყენება ამ პროცესების აღწერისას ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. წრეწირზე თანაბარი მოძრაობის აღწერა მიმდინარეობს შესაბამისი ფიზიკური სიდიდეების გამოყოფით: ბრუნვის პერიოდი — დრო, რომლის განმავლობაში მატერიალური წერტილი წრეწირზე ერთ სრულ ბრუნს ასრულებს: $T=\frac{t}{N}$, N — მატერიალური წერტილის მიერ t დროში შესრულებული სრულ ბრუნვათა რიცხვია; საზომ ერთეულად მიღებულია წამი.

M წერტილის წრეწირზე მოძრაობისას, ამ წერტილის ორთოგონალური გეგმილები Ox და Oy ღერძებზე ასრულებენ რხევით მოძრაობას $2a$ სიგრძის მონაკვეთებზე (a წრეწირის რადიუსია). ეს წერტილები N-ით და K-თი არის სურათზე აღნიშნული; მათი მოძრაობა, შესაბამისად, აღიწერება ფორმულებით:

$$x=acos(\omega t+\varphi_0) \text{ და } y=asin(\omega t+\varphi_0).$$

აქ φ_0 მოძრავი წერტილის საწყის მდებარეობას განსაზღვრავს. ზემოთ მითითებული ფორმულებით წარმოდგენილ რხევით მოძრაობას ჰარმონიული რხევა ეწოდება. ასეა დაკავშირებული წრეწირზე წერტილის მოძრაობა ჰარმონიულ რხევებთან. ჰარმონიული რხევების გააზრებას ემსახურება მაგალითი, როცა ტვირთი ზამბარის მოქმედებით ასრულებს რხევით მოძრაობას. აქ შეიძლება გამოვიყენოთ „ს" რუბრიკით მოცემული მა-

სალა და ავხსნათ — პროცესის მათემატიკური შესწავლა იწყება ზოგიერთი დაშვების გამოყენებით — ტვირთზე მოქმედი ზოგიერთი ძალის უგულებელყოფით; ამ შემთხვევაში შესაძლებელი ხდება რხევითი პროცესის აღწერა ფორმულებით, რომლებიც ჰარმონიული რხევების განტოლებებია.

მოსწავლეებს შეიძლება არ ახსოვდეთ გრაფიკების გარდაქმნის შემთხვევები, რომლებიც X კლასში განიხილება, ამიტომ დაწვრილებით არის აღწერილი ზოგიერთი ჰარმონიული რხევის გრაფიკული წარმოდგენა — შესაბამისი გრაფიკის აგების პროცესი.

ამოცანების საშუალებით მიმდინარეობს ჰარმონიულ რხევასთან დაკავშირებული სიდიდეებისა და ჰარმონიული რხევების გრაფიკების აგების გააზრება.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

1 თუ ჰარმონიული რხევა მოცემულია $x(t)=a\sin(\omega t+\varphi_0)$ ფორმულით, მაშინ ამ ჰარმონიული რხევის ამპლიტუდა არის a, სიხშირე — ω. გრაფიკიდან ჩანს, რომ a (ამპლიდუტა) არის 2, $\omega=4$ ($\sin t$-ს შეკუმშვა მოხდა $\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{8}=4$-ჯერ); მოსწავლემ უნდა შეძლოს შესაბამისი ფორმულის წარმოდგენაც: $x(t)=2\sin 4t$.

2 ა) $x(t)=\frac{3}{4}\sin(t-\frac{\pi}{6})$. აქ $a=\frac{3}{4}$, $\varphi_0=-\frac{\pi}{6}$, $\omega=1$;

ბ) $x(t)=0{,}4\sin(0{,}4\pi t+\frac{\pi}{8})$, აქ $a=0{,}4$, $\varphi_0=\frac{\pi}{8}$, $\omega=0{,}4\pi$;

გ) $x(t)=4\sin(7t-3)$, $a=4$, $\omega=7$, $\varphi_0=-3$;

დ) $x(t)=\frac{\pi}{3}\sin 4t$, $a=\frac{\pi}{3}$, $\omega=4$, $\varphi_0=0$.

3 $a=3{,}5$, $T=\frac{3\pi}{2}$, $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$.

გავითვალისწინოთ: $T=\frac{2\pi}{\omega}$, $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi:\frac{3\pi}{2}=\frac{4}{3}$;

$x(t)=3{,}5\sin(\frac{4}{3}t+\frac{\pi}{3})$.

4 გ) $y=4\cos(x+\frac{\pi}{4})$; გრაფიკი მიიღება $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკისგან Oy ღერძის გასწვრივ 4-ჯერ გაჭიმვისა და პარალელური გადატანით $\vec{P}(0;\ -\frac{\pi}{4})$ ვექტორით; სურათი შეიძლება იხილოთ სახელმძღვანელოს პასუხებში.

Oy ღერძს კვეთს $(0;\ 2\sqrt{2})$ წერტილში: მაქსიმუმის წერტილებია $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; ნულები: $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

5 აქ უნდა გამოვიყენოთ ფორმულა: $T=\frac{2\pi}{\omega}$, ანუ $\omega=\frac{2\pi}{T}\approx\frac{2\cdot 3{,}14}{5400}$ რად/წმ, რადგან $T=1$ სთ 30 წთ$=5\,400$ წმ. მაშასადამე, $\omega\approx 0{,}0012$ რად/წმ.

6 მოცემულია: $\varphi=3t$; ბორბლის წერტილების კუთხური სიჩქარე ასე გამოითვლება: $\omega=\frac{\varphi}{t}=3$ (რად/წმ); რადიუსი $r=0{,}2$ მ, წირითი სიჩქარე: $v=\omega r=3\cdot 0{,}2=0{,}6$ მ/წმ.

(7) აქ r (რადიუსი) =62 სმ = 0,62 მ;

T=60 წთ=3600 წმ

წირითი სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით:

$$v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\pi\cdot 62\text{ სმ}}{1\text{ სთ}}=124\pi\text{ სმ/სთ},$$

ან
$$v=\frac{2\pi r}{T}\approx\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}62}{3600}\approx 0{,}001\text{ (მ/წმ)}.$$

კუთხური სიჩქარე: $\omega=\frac{v}{r}=\frac{124\pi}{62}=2\pi$ რად/სთ, ან $\omega=\frac{v}{r}=\frac{0{,}001}{0{,}62}=0{,}002$ (რად/წმ).

მოსწავლემ მიაქციოს ყურადღება v, r და T-ს განზომილებებს.

საშინაო დავალების ამოცანებში მოსწავლეები იმ ფორმულებს იყენებენ, რომელთა საშუალებითაც საკლასო ამოცანები ამოიხსნა. გრაფიკები საკლასო დავალებაში მოცემული გრაფიკების ანალოგიურად აღიწერება.

△1 აქ, გრაფიკის მიხედვით, გვაქვს: $a=\frac{1}{2}$, $c=0$, $\omega=\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{4}=2$.

△2 დ) $x(t)=4sin(2t-3)$; $a=4$, $\omega=2$, $\varphi_0=-3$.

△4 $2R=0{,}2$ მ, $R=0{,}1$ მ.

12000 ბრუნს აკეთებს 10 წთ-ში, ანუ 600 წმ-ში, 1 ბრუნს — $\frac{1}{20}$ წმ-ში. $T=\frac{1}{20}$ წმ არის ბრუნვის პერიოდი; კუთხური სიჩქარე $\omega=\frac{2\pi}{T}=40\pi$ რად/წმ; წირითი სიჩქარე $v=\omega R=40\pi\cdot 0{,}1=4\pi$ მ/წმ.

△5 ანალოგიური ამოცანა კლასში იყო ამოხსნილი.

△6 A და B წერტილების წირითი სიჩქარეებია: $v_1=6$ მ/წმ, $v_2=5{,}5$ მ/წმ, $AB=0{,}15$ მ.

თუ A წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიის რადიუსია R, მაშინ B წერტილის იქნება $R-0{,}15$.

ორივე წერტილის კუთხური ω სიჩქარეები ტოლია, ამიტომ გვექნება:

$$\frac{v_1}{R}=\frac{v_2}{R-0{,}15};\ v_1R-0{,}15v_1=v_2R.$$

$$(v_1-v_2)R=0{,}15v_1,$$

$$R=\frac{0{,}15v_1}{v_1-v_2}=\frac{0{,}15\cdot 6}{0{,}5}=\frac{0{,}9}{0{,}5}=1{,}8\text{ (მ)}.$$

კომპლექსური დავალება ამ თავის სამიზნე ცნებებს უკავშირდება, ის გამიზნულია დასახელებული თემის ფარგლებში განსახილველი საკითხების დასამუშავებლად და ახალი ცოდნის ასაგებად; მოსწავლემ უნდა შეძლოს, ახსნას რხევითი პროცესების აღწერისას ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გამოყენების მიზეზები; მოიძიოს ინფორმაცია სხვადასხვა რხევითი პროცესის შესახებ, მათ შორის ჰარმონიული რხევების შესახებ, შეადაროს წრეწირზე თანაბარი მოძრაობა ჰარმონიულ რხევებს; მოსწავლემ უნდა აღ-

წეროს ის ფიზიკური სიდიდეები (ამპლიტუდა, ფაზა, საწყისი ფაზა, სიხშირე, წირითი სიჩქარე, კუთხური სიჩქარე), რომლებიც წრეწირზე თანაბარ მოძრაობას უკავშირდება; ინტერნეტის საშუალებით შეიძლება ვიდეომასალის მოძიებაც, რომლებზეც სხვადასხვა რხევითი პროცესებია აღწერილი. შეიძლება იმ მასალის გამოყენებაც, რომელიც სახელმძღვანელოში „ს“ (სხვადასხვა) რუბრიკით არის წარმოდგენილი და აღწერილია პროცესის მათემატიკური მოდელის შექმნის საწყისი სტადია — ე. წ. ფორმალური მოდელის შექმნა — სხვადასხვა გარემოების უგულებელყოფა და დაშვებები, რომლებიც აუცილებელია მათემატიკის გამოსაყენებლად. ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება მოიძიოს ცნობილი ამოცანის — „მტაცებლისა და მსხვერპლის“ ამოცანის მათემატიკური მოდელის უფრო დაწვრილებითი აღწერა, ვიდრე სახელმძღვანელოშია წარმოდგენილი; შეიძლება შესაბამისი ფორმულების ამოწერაც, ეს ფორმულები ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შეიცავს და იმ რხევით პროცესს შეესაბამება, რომელიც მტაცებლისა და მსხვერპლის რაოდენობების ცვლილებებს შორის კავშირს აღწერს. ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება მოიძიოს ის განტოლებები, რომლებსაც ექვემდებარება მოძრაობა, გამოწვეული ზამბარის დრეკადობის ძალების მოქმედებით. ეს განტოლება აკავშირებს $x(t)$ ფუნქციას მის მეორე რიგის წარმოებულთან, ასეთ განტოლებებს კი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები აკმაყოფილებს. პრეზენტაციისას უნდა აღინიშნოს რხევითი მოძრაობის დამახასიათებელი თვისება, მოძრაობის პერიოდულობა; პერიოდულ რხევებს შორის განსაკუთრებული ადგილი ჰარმონიულ რხევებს უკავია. ამ რხევების მახასიათებელი სიდიდე დროში იცვლება ე. წ. სინუსური წესით; თუ აღნიშნული სიდიდეა სხეულის x კოორდინატი, მაშინ

$$x(t)=a\sin(\omega t+\varphi_0),$$

a რხევის ამპლიტუდაა, ω — რხევის სიხშირე და რხევის T პერიოდთან დაკავშირებულია ფორმულით: $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$.

პრეზენტაციისას უნდა აღინიშნოს, რომ წრეწირზე მოძრაობა რხევითი მოძრაობის ერთ-ერთი სახეა; შეიძლება მაგალითების მოყვანა — მაგალითად, დედამიწის ზედაპირის წერტილების ბრუნვა დედამიწის ღერძის გარშემო; ავტომობილის ბორბლის წერტილების ბრუნვა; საათის ისრის წერტილების ბრუნვა.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

საკითხები: პერიოდული პროცესები და პერიოდული ფუნქციები, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, თვისებები და გრაფიკები.

მკვიდრი წარმოდგენები: პერიოდული პროცესები, როგორც წესი, აღიწერება ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით; სხვადასხვა საკვლევი, სამეცნიერო საკითხისა, თუ ყოფითი მოვლენის განხილვისას სიდიდეები წარმოიდგინება შესაბამისი მახასიათებლებით (რიცხვებით, მიმართულებებით).

შეფასების ინდიკატორები. მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეებსა და მათ ერთეულებს შორის თანაფარდობის გამოთვლა; შესასწავლი პროცესიდან გამომდინარე, სიდიდეთა შორის ფუნქციური კავშირის დამყარება, ტრიგონომეტრიული ფუნქციის გამოყენება სხვადასხვა კონტექსტში ცვლილებათა გასაანალიზებლად და რეალური მოვლენის მოდელირებისთვის.

სავარაუდო დრო: 2 სთ.

თვითშეფასების ტესტის საშუალებით, მოსწავლე კიდევ ერთხელ შეაფასებს თავის შესაძლებლობებს, თავისი ცოდნის დონეს, აღმოაჩენს ხარვეზებს საკუთარ ცოდნაში. მასწავლებელი ითვალისწინებს მოსწავლეთა მოსაზრებებს თვითშეფასების ტესტის შესრულების შესახებ და იყენებს განმავითარებელი შეფასებისთვის.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

1 დ) თუ $[5-3x]=-10$, მაშინ, ცხადია,

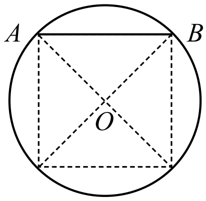
$-10\leq 5-3x<-9$;

$-15\leq -3x<-14$;

$\frac{14}{3}<x\leq 5$.

2 $sinkx$-ის უმცირესი დადებითი პერიოდია $\frac{2\pi}{k}$. მივიღეთ: $\frac{2\pi}{k}=9\pi$, $k=\frac{2}{9}$.

3



ცხადია, $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$; მისი დამატებითი კუთხე — $2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$.

4 $sin\frac{7\pi}{8}tg\frac{9\pi}{8}=sin(\pi-\frac{\pi}{8})tg(\pi+\frac{\pi}{8})=sin\frac{\pi}{8}tg\frac{\pi}{8}>0$;

$cos\frac{4\pi}{5}tg\frac{3\pi}{8}=cos(\pi-\frac{\pi}{5})tg\frac{3\pi}{8}=-cos\frac{\pi}{5}tg\frac{3\pi}{8}<0$.

5 α არის II მეოთხედის კუთხე, $cos\alpha=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $tg\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{20}$.

6 $3x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$;

$3x=-\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$;

$x=-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{3},\ k\in \boldsymbol{Z}$.

7 შეიძლება გამოვიყენოთ კოსინუსის გრაფიკი; შეიძლება ვისარგებლოთ დაყვანის ფორმულით:

$sinx=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$ (1)

ან $x=\frac{4\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. (2)

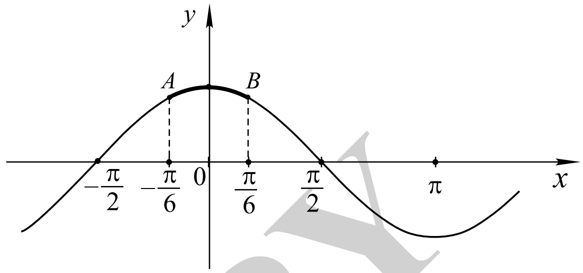
(1)-დან, თუ $k=0$, გვაქვს: $x=-\frac{\pi}{3}$;

(2)-დან, თუ $k=0$, გვაქვს: $x=\frac{4\pi}{3}$;

თუ $k=-1$, გვაქვს: $x=-\frac{2\pi}{3}$.

8 ვისარგებლოთ გრაფიკით;
AB რკალის შესაბამისად, გვაქვს:

$-\frac{\pi}{6}+2\pi k\le x\le\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$



9 $arcsin(cos\frac{\pi}{6})+arccos(sin(-\frac{\pi}{4}))=$
$=arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{13\pi}{12}.$

10 $a=\pi;\ T=\frac{5\pi}{3},\quad \varphi_0=\frac{\pi}{8}.\quad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi:\frac{5\pi}{3}=\frac{6}{5};$
$x(t)=\pi sin(\frac{6}{5}t+\frac{\pi}{8}).$

შეაფასეთ თქვენი შედეგი

1 ამოცანაში რიცხვის მთელი და წილადი ნაწილების ცნებების შინაარსის ცოდნა შეგიფასდებათ 0,5 ქულით; ა) და ბ) დავალებების ამოხსნით დაიმსახურებთ კიდევ 0,5-0,5 ქულას; გ) და დ) დავალებებიდან თითოეულის ამოხსნით — კიდევ თითო ქულას; ე) დავალებაში სისტემის ამოხსნით და *x*-ის დადგენით — კიდევ 1,5 ქულას. ამოცანა 5-ქულიანია.

2 ამოცანაში *y=sinx*-ის უმცირეს დადებით პერიოდსა და *y=sinkx*-ის პერიოდს შორის თანაფარდობის მიხედვით (ან უშუალო განხილვით) ამოცანის ამოხსნა მოგანიჭებთ 1 ქულას. ამოცანა 1-ქულიანია.

3 ამოცანაში მითითებული ცენტრული კუთხეების მიხედვით სათანადო რკალების რადიანული ზომების პოვნით დაიმსახურებთ 2 ქულას.

4 ამოცანაში თითოეული ფუნქციის ნიშნის დადგენით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას. მოცემული გამოსახულებების შედარებით — კიდევ 0,5 ქულას. ამრიგად, ამოცანა 2,5-ქულიანია.

5 ამოცანაში სინუსის მიხედვით კოსინუსისა და ტანგენსის დადგენა შეფასდება 0,5-0,5 ქულით. ნიშნის არასწორად მითითების შემთხვევაში მხოლოდ 0,5 ქულას დაიმსახურებთ. ამოცანა 1-ქულიანია.

6 ამოცანაში *tgx=m* განტოლების ამონახსნთა ფორმულისა და მის მიხედვით მოცემული განტოლების ამონახსნების პოვნა შეფასდება 2 ქულით, მცირე ხარვეზების შემთხვევაში — მხოლოდ 1 ან 1,5 ქულით.

7 ამოცანის ზოგადი ამონახსნიდან საძიებელი ამონახსნების გამოყოფით, ან სხვა მოსაზრებებით მიღებული პასუხი შეფასდება 2,5 ქულით. ამონახსნთა არასრული სიმრავლის მითითებისას დასაშვებია 2 ან 1,5 ქულის მიღება. უმაღლესი შეფასებაა 2,5 ქულა.

(8) ამოცანაში $cosx=\frac{\sqrt{3}}{2}$ განტოლების ამონახსნების მითითებისას დაიმსახურებთ 0,5 ქულას, მოცემული უტოლობის ამოხსნის წარმოდგენით — კიდევ 2 ქულას. მცირე ხარვეზის შემთხვევაში დასაშვებია 1 ან 1,5 ქულის მიღება, ამოცანა 2,5-ქულიანია.

(9) ამოცანაში სინუსისა და კოსინუსის მნიშვნელობათა პოვნით დაიმსახურებთ 0,5-0,5 ქულას. მოცემულ გამოსახულებაში თითოეული შესაკრების მნიშვნელობის მითითებით დაიმსახურებთ კიდევ თითო ქულას, ამრიგად, ამოცანა 3-ქულიანია.

(10) ამოცანაში ჰარმონიული რხევის ზოგადი ფორმულის წარმოდგენით დაიმსახურებს 0,5 ქულას, სიხშირის დადგენით — კიდევ 0,5 ქულას, საძიებელი ფორმულის დადგენით — კიდევ 0,5 ქულას, ამრიგად, ამოცანა 1,5-ქულიანია.

რამდენი ქულა მიიღეთ?

21-23 ქულა — დავალება შესრულებულია ძალიან კარგად (შეფასება მაღალია);

17-20 ქულა — დავალება შესრულებულია კარგად (შეფასება საშუალოზე მაღალია);

12-6 ქულა — დავალება შესრულებულია ნაწილობრივ (შეფასება საშუალოა);

12 ქულაზე ნაკლები ქულის შემთხვევაში გჭირდებათ უფრო გულმოდგინე მუშაობა (შეფასება დაბალია).

I თავის დამატებითი ამოცანები

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

მთელი და წილადი ნაწილების ცნებების შესახებ ცოდნის განმტკიცება (1) და (2) ამოცანების გამოყენებით ხდება.

(1) ა) $[x]=5$; ეს განტოლება ტოლფასია ორმაგი უტოლობის: $5\le x<6$.

გ) $[2x-3]=5$;
$5\le 2x-3<6$; $8\le 2x<9$;
$4\le x<4,5$.

ე) $\{3x-1\}=0,8$;
$3x-1=k+0,8,\ k\in \boldsymbol{Z}$;
$3x=k+1,8,\ k\in \boldsymbol{Z}$;
$x=\frac{k}{3}+0,6,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

(2) დ) $\{x\}=0,2$; $x=k+0,2,\ k\in \boldsymbol{Z}$;
$4x=4k+0,8,\ k\in \boldsymbol{Z}$;
$4x+2=4k+2,8,\ k\in \boldsymbol{Z}$;
$\{4x+2\}=0,8$.

(3) $f(4x)$-ის პერიოდია $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$;
$f(6x)$-ის — $\frac{6}{6}=1=\frac{2}{2}$;
$f(4x)+f(6x)$-ის — $\frac{6}{2}=3$.

(4) პირობის თანახმად, $T=4$, $f(-x)=f(x)$ და $f(1,2)=2,5$; $f(-1,2)=2,5$;
$f(13,2)=f(13,2-3\cdot 4)=f(1,2)=2,5$;
$f(-5,2)=f(5,2)=f(1,2)=2,5$;
$f(18,8)=f(-18,8)=f(-18,8+5\cdot 4)=f(1,2)=2,5$.

(5) დ) $y=4cos(\frac{\pi}{3}x-2)$; $T=2\pi:\frac{\pi}{3}=6$.

6 $\cup BA=\cup AC=\cup CB=120^0$;

$\cup PA=120^0-72^0=48^0$.

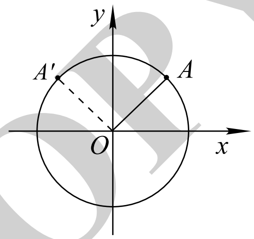
ა) $R_0^{48^0}$; ბ) $R_0^{120^0}$;

გ) $\cup PB=72^0$; $360^0-72^0=288^0$, $R_0^{288^0}$;

დ) $R_0^{240^0}$.

7 $S_{OY}(A)=A'=(-1;\ \sqrt{3})$;

$\angle AOA'=2arctg\dfrac{1}{\sqrt{3}}=2\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$.



8 $P=(4;\ 2)$

$tg\angle POM=\dfrac{1}{2}$; $OP=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$; $cos\angle POM=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

$sin\angle POM=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

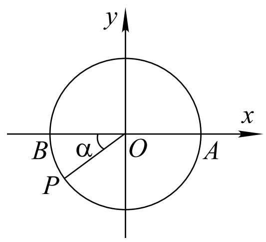
9 $\angle POB=\alpha$; $tg\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{5}{4}}}=\dfrac{2}{3}$

$sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$;

ვთქვათ, $P=(x;\ y)$, $x<0$, $y<0$.

$cos=\dfrac{|x|}{R}=\dfrac{|x|}{12}$; $|x|=12\cdot\dfrac{2}{3}=8$, $x=-8$;

$sin\alpha=\dfrac{|y|}{12}$; $|y|=4\sqrt{5}$, $y=-4\sqrt{5}$.



10 $-1\le\dfrac{4a-3}{4}\le1$; $-4\le4a-3\le4$; $-1\le4a\le7$; $-\dfrac{1}{4}\le a\le\dfrac{7}{4}$.

12 $y=kx+b$; $k=tg45^0=1$,

$-2=3+b$; $b=-5$; $y=x-5$.

19 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$; $2x=\dfrac{\pi}{4}$;

$x=\dfrac{\pi}{8}$.

21 ბ) $\left|\dfrac{4a^2-9}{3}\right|>1$;

$4a^2-9>3$; $4a^2>12$; $a^2>3$; $|a|>3$;

ან $4a^2-9<-3$; $4a^2<6$; $a^2<\dfrac{3}{2}$; $|a|<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$(-\infty;\ -\sqrt{3})\cup\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2};\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\cup(\sqrt{3};\ +\infty)$.

23 დ) $sin(3x-\dfrac{\pi}{4})=-1$;

$3x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$;

$3x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$;

$x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi}{3}k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

24 გ) $cos(3x+\dfrac{\pi}{4})=0$;

$3x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$;

$3x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$;

$x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

25 ა) tgx-ის მიმართ კვადრატული განტოლება გვაქვს;

$tgx=3$ ან $tgx=\frac{1}{3}$.

$x=arctg3+\pi k$; $x=arctg\frac{1}{3}+\pi k$; $k\in\boldsymbol{Z}$.

დ) $2cos^2x+3cosx-5=0$;

$D=9+40=49$;

$cosx\neq-\frac{5}{2}$,

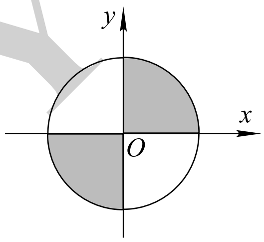
$cos=1$, $x=2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

26 ა) $sinx<1$ სრულდება ნებისმიერი x-ისთვის, გარდა

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ რიცხვებისა.

დ) $tgx>0$ სრულდება ნებისმიერი x-ისთვის შუალედებიდან

$\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.



27 $tg(2x+\frac{\pi}{3})=1$; $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+\pi k$;

$2x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$; $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k=-\frac{\pi}{24}+\frac{12\pi}{24}k$.

თუ $k=3$, მაშინ $x=\frac{35\pi}{24}$;

თუ $k=4$, მაშინ $x=\frac{47\pi}{24}$;

თუ $k=5$, მაშინ $x=\frac{59\pi}{24}$;

თუ $k=6$, მაშინ $x=\frac{71\pi}{24}$.

x-ის მხოლოდ ეს მნიშვნელობები ეკუთვნის მითითებულ შუალედს.

28 $R=30$ მ, $\omega=\frac{\pi}{6}$ რად/წმ, $v=\omega R=5\pi$ მ/წმ.

შემაჯამებელი წერა №2

თემატური ბლოკი: პერიოდული პროცესები და პერიოდული ფუნქციები; ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

სამიზნე ცნებები: სიდიდეები, შესაბამისობა, ფუნქცია (სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება), გრაფიკი, განტოლება.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს ტრიგონომეტრიული განტოლების ზოგადი ამონახსნის წარმოდგენა, მითითებული შუალედიდან ამონახსნების შერჩევა; რხევითი პროცესების აღწერა ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით.

ამოცანების ნიმუშები:

1 იპოვეთ $sinx=\frac{1}{2}$ განტოლების ყველა ამონახსნი, რომლებიც ეკუთვნის $[-2\pi;\ 0]$ შუალედს.

2 იპოვეთ x-ის ყველა მნიშვნელობა $[0;\ 2\pi]$ შუალედიდან, რომლებიც აკმაყოფილებს $tgx=\sqrt{3}$ განტოლებას.

3 იპოვეთ $sinx=0{,}1$ განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც

ა) $[2\pi;\ \frac{5\pi}{2}]$ შუალედშია; ბ) $[\frac{\pi}{2};\ \pi]$ შუალედშია.

4 ამოხსენით განტოლება:

ა) $2sin(\frac{\pi}{4}-2x)=\sqrt{2}$; ბ) $2cos(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{3})-1=0$; გ) $2tg(x-\frac{\pi}{4})+\sqrt{3}=0$.

5 ერთ-ერთი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეს ასეთი სახე აქვს: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. წარმოადგინეთ ამონახსნები ლუწი და კენტი k-სთვის და შეარჩიეთ მათგან ის ამონახსნები, რომლებიც $[-\frac{\pi}{2};\ 3\pi]$ შუალედს ეკუთვნის.

6 ჰარმონიული რხევა წარმოდგენილია $x(t)=0{,}2sin(3t-\frac{\pi}{3})$ ფორმულით. იპოვეთ ამ რხევის პერიოდი, ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა.

პასუხები: 1 $-\frac{11\pi}{6}$ და $-\frac{7\pi}{6}$. 2 $x=\frac{\pi}{3},\ x=\frac{4\pi}{3}$. 3 ა) $2\pi+arcsin0{,}1$, ბ) $\pi-arcsin0{,}1$. 4 ა) $x_1=\pi k;\ x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; ბ) $x_1=6\pi k;\ x_2=2\pi+6\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; გ) $x=\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. 5 $\frac{13\pi}{12}$ და $\frac{17\pi}{12}$. 6 $0{,}2$ — ამპლიტუდა, $-\frac{\pi}{3}$ — საწყისი ფაზა, $\frac{2\pi}{3}$ — პერიოდი.

მითითებები:

1 $x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ და $x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\ k\in \boldsymbol{Z}$ ამონახსნებიდან პირობას აკმაყოფილებს $-2\pi+\frac{\pi}{6}$ და $-2\pi+\frac{5\pi}{6}$. 5 განვიხილოთ k-ს მნიშვნელობები $k=2n$ და $k=2n+1$. მაშინ ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $x_1=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2\pi n=-\frac{7\pi}{12}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $x_2=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\pi(2n+1)=\pi+\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. მათგან $[-\frac{\pi}{2};\ 3\pi]$ შუალედს ეკუთვნის $\pi+\frac{\pi}{12}$ და $2\pi-\frac{7\pi}{12}$. 6 ამპლიტუდაა $0{,}2$, პერიოდი — $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$ არის საწყისი ფაზა.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

(1)-(4) ამოცანების თითოეული დავალების შესრულება შეფასდეს 1 ქულით. განტოლების მხოლოდ ზოგადი ამონახსნის ან მითითებულ ამონახსნთა არასრული სიმრავლის წარმოდგენა — მხოლოდ 0,5 ქულით.

(5) k-ს ლუწი და კენტი მნიშვნელობებისთვის ცალ-ცალკე ამონახსნების წარმოდგენა შეფასდეს 1 ქულით, მითითებული შუალედიდან ამონახსნების შერჩევა — კიდევ 1 ქულით.

(6) ამპლიტუდის და საწყისი ფაზის მითითება — 0,5 ქულით, პერიოდის მითითება — კიდევ 0,5 ქულით.

აღწერილი აქტივობა მეორე შემაჯამებელი წერაა, რომელიც ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს და მათ გამოყენებებს მიეძღვნა. ამჯერად ხაზგასმულია უმარტივეს ტრიგონომეტრიულ განტოლებებთან და ჰარმონიულ რხევებთან დაკავშირებული საკითხები. ამ დიდი მნიშვნელობის გამო, ბუნებრივია, კვლავ, შემაჯამებელი წერის განმსაზღვრელი შეფასებების შემდეგ, ცოდნის გაღრმავებასა და წარდგენილ ამოცანათა ანალიზს მივუძღვნათ განმავითარებელი შეფასება. უფრო დაკონკრეტებული მიზნები ამ განმავითარებელი შეფასებისა წინამორბედ განმავითარებელ შეფასებაში აისახა, ამიტომ აქ მათ აღარ გავიმეორებთ.

შემაჯამებელი წერის დავალებათა საჯარო ანალიზის დაწყებამდე, მოსწავლეთა აქტიური ჩართულობით, მიმოვიხილოთ *sin*, *cos* და *tg* ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი გრაფიკები. ეს განხილვა კიდევ უფრო წარმოაჩენს ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნის დეტალებს. განიხილეთ ელემენტარულ (უმარტივეს) ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა სახეები: განსაკუთრებული ყურადღება *arcsina*, *arccosa* და *arctga* ამონახსნებს დაუთმეთ; ეს საკითხი დიდად სახალისო და ნათელი არ არის ხოლმე მოსწავლეებისთვის. კლასმა უნდა დაინახოს ამ ამონახსნებისთვის რატომ შეირჩა ესა თუ ის შუალედი რიცხვით წრფეზე, რამდენი ამონახსნი მოეძებნება მოცემულ განტოლებას აღნიშნულ შუალედში; ამ სტანდარტული ამონახსნების გამოყენებითა და ფუნქციათა პერიოდულობის გათვალისწინებით როგორ აიგება მოცემული განტოლების ყველა ამონახსნის სიმრავლე.

მოსწავლეთა ერთ ნაწილს არ უჭირს თითოეული ტიპის განტოლების ზოგადი ამონახსნის ფორმულის დამახსოვრება და მითითება, თუმცა მათგან რაიმე შუალედში არსებული კერძო ამონახსნების მოძიებას ვერ ახერხებს. ამ საკითხის განხილვისას ხაზგასმით წარმოაჩინეთ ამ ძიების პროცესი, ამოწერეთ არა მხოლოდ თქვენთვის ცხადი მნიშვნელობები მთელ რიცხვთა უსასრულო სიმრავლიდან და სათანადო ამონახსნები. ამის შემდეგ, შესაძლოა რიცხვების შედარების არატრივიალური განხილვით, დაიტოვოთ მოცემული შუალედის ამონახსნები. ამით მოსწავლეები თვალნათლივ დაინახავენ როგორ სცდება, ან როგორ მიეკუთვნება მოცემულ შუალედს ესა თუ ის ამონახსნი.

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ჩართვა რხევითი პროცესების განხილვაში იმდენად მნიშვნელოვანი აქტივობაა, რომ ერთადერთი ამოცანის საჯარო განხილვა შეავსებს არსებული საკითხების ფართო კვლევას. ამით ხომ რეალური პროცესების აღწერის ნიმუშებს განიხილავთ.

ახლა წარმოგიდგენთ ამ განმსაზღვრელი შეფასების მიხედვით დაკონკრეტებულ ზოგადად ჩამოყალიბებული სოლო ტაქსონომიის აკადემიურ მიღწევათა დონეებს.

1. პრესტრუქტურული დონე. აქვს არამკაფიო წარმოდგენა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებზე, მათ თვისებებზე, გრაფიკებზე. ვერ აყალიბებს მკაფიოდ ამოცანათა პირობებს, განტოლების ზოგადი ამონახსნის გაცნობის შემდეგაც კი უჭირს რამდენიმე კონკრეტული ამონახსნის დასახელება.

2. უნისტრუქტურული დონე. ახერხებს ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ზოგადი ამონახსნებიდან კერძო ამონახსნების მიღებას, თუმცა უჭირს მათგან გამოყოფა იმ ამონახსნების, რომლებიც მოცემულ შუალედს ეკუთვნის. ერთვება ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გრაფიკების განხილვაში, თუმცა ფრაგმენტულად. ბუნდოვანი წარმოდგენა აქვს რხევითი პროცესების აღწერაზე.

3. მულტისტრუქტურული დონე. ერთვება ყველა საკითხის განხილვაში, თუმცა ამ დროს ზოგჯერ არათანმიმდევრულია. აღწერს, თუ რა პრინციპით შეირჩა განტოლებათა სტანდარტული ამონახსნები: *arcsina*, *arccosa*, *arctga*. მათი დახმარებით როგორ აიგება ზოგადი ამონახსნი — ამ საკითხს თანაკლასელებს მკაფიოდ ვერ უხსნის. ჰარმონიული რხევის განტოლების მიხედვით ასახელებს რხევის ამპლიტუდას, პერიოდს და საწყის ფაზას, მაგრამ მათ შორის კავშირებს სრულყოფილად ვერ წარმოადგენს.

4. მიმართებითი დონე. ამოხსნა შემაჯამებელი წერის ყველა ამოცანა, ჩამოაყალიბა ამოხსნების გზები მკაფიოდ, სტრუქტურირებულად. სისრულე აკლდა რხევითი პროცესების წარმოდგენას და აღწერას, თუმცა შეძლო ამოცანის ამოხსნა.

5. გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. მოსწავლის ნაშრომში, საჯარო განხილვაში იგრძნობა მისი მაღალი აკადემიური მზაობა. საკითხების კვლევაში ჩაღრმავების დროსაც ნათლად წარმოაჩენს არსებით დეტალებს. უფრო მეტიც, თავად სახავს საკითხთა განზოგადების გზებს და მათი გადაჭრის შესახებ ყურადსაღებ ჰიპოთეზებს. მისი მსჯელობის სტილი მკაფიო და დამაჯერებელია.

განმავითარებელი შეფასების შემდეგ ჩანიშნეთ ამ განხილვისას აღმოჩენილი საყურადღებო ფაქტები; მიღწევები, ხარვეზები, კონკრეტულ მოსწავლეებთან შემდგომი მუშაობის მიმართულებები. ეს ჩანაწერები გააიოლებს თქვენს შემდგომ მუშაობას და უფრო წარმატებულს გახდის მას.

II თავი

ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები სამკუთხედში

თემები: ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები სამკუთხედში.

საათების სავარაუდო რაოდენობა: 16 სთ.

თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: სინუსების თეორემა, კოსინუსების თეორემა.

სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	კომპლექსური დავალება
სამკუთხედის ელემენტებს შორის კავშირების დასადგენად ვიყენებთ ტრიგონომეტრიას.	სამკუთხედის ფართობის ფორმულები; ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირები.	რა პრაქტიკული გამოყენებები აქვს სინუსებისა და კოსინუსების თეორემებს?	ტრიგონომეტრიის სხვადასხვა გამოყენება.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს გეომეტრიული ობიექტების განსაზღვრებათა და თვისებათა სწორად ჩამოყალიბება; გეომეტრიული ობიექტების ზომების გამოთვლა (მათ. საშ. 4); რეალურ ცხოვრებაში სხვადასხვა ყოფითი მოვლენის განხილვისას სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით; სიდიდეებსა და მათ ერთეულებს შორის თანაფარდობის გამოთვლა. რეალურ ცხოვრებაში გეომეტრიული ფორმების ამოცნობა, აღწერა, კლასიფიკაცია; გეომეტრიული ობიექტის ზომის (მაგალითად, სიგრძის) გამოთვლა (მათ. საშ. 4).

ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენის მათემატიკური მოდელირება, ტრიგონომეტრიის გამოყენება ყოფითი პრობლემების გადაჭრისას.

2.1. სინუსების თეორემა

ახალ მასალაზე გადასვლა წინარე ცოდნის გააქტიურებით იწყება. სამკუთხედის კუთხეების ჯამის ფორმულა, პითაგორას თეორემა, სინუსის, კოსინუსისა და ტანგენსის განსაზღვრებების შესახებ ცოდნის გამეორება ახალი მასალის ათვისების აუცილებელი პირობაა. შეიძლება გაკვეთილი კომპლექსური დავალების გაცნობითაც დავიწყოთ და მოსწავლეთა ყურადღება გავამახვილოთ პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას სამკუთხედის კუთხეებისა და გვერდებს შორის სხვადასხვა თანაფარდობის აღმოჩენისა და დამტკიცების მნიშვნელობაზე. მე-2 თავის პირველი პარაგრაფით ვიწყებთ იმ თეორემების დამტკიცებას, რომლებიც მათემატიკის მრავალი პრაქტიკული გამოყენების საფუძველია; სწორედ ასეთი პრაქტიკული პრობლემის ჩამოყალიბებით ვიწყებთ სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეების ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის კავშირების აღმოჩენის პროცესს; ერთ კერძო შემთხვევაში ამოცანის ამოსახსნელად პითაგორას თეორემის გამოყენება შეიძლება იყოს საკმარისი; თუმცა, ნებისმიერ სამკუთხედშიც გვაქვს ანალოგიური პროპორციის დაწერის შესაძლებლობა (გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია). ასე „მივდივართ“ სინუსების თეორემის ჩამოყალიბებამდე. თეორემის დამტკიცება მოსწავლეთა აქტიური ჩართულობით, კონსტრუქტივისტულ რეჟიმში უნდა წარიმართოს.

— რა შემთხვევები შეიძლება გვქონდეს ABC სამკუთხედში A და C კუთხეების მიხედვით, თუ C კუთხე არ არის მართი კუთხე? (C მახვილია, A მახვილია; C მახვილია, A ბლაგვია; C ბლაგვია).

— შეიძლება თუ არა, რომ A და C — ორივე ბლაგვი იყოს?

— განიხილეთ სიმაღლის გავლების შემდეგ მიღებული მართკუთხა სამკუთხედები და მთელი კლასი აქტიური ჩართულობით მიაკვლევს ფორმულებს, რომლებითაც სიმაღლე გამოისახება ჯერ a, შემდეგ კი c გვერდებით.

ეს შედეგები მიგვიყვანს $\frac{c}{sinC}=\frac{b}{sinB}$ ფორმულამდე. ანალოგიური მსჯელობა A წვეროდან გავლებული სიმაღლის შემთხვევაში დაასრულებს იმ ფორმულის მიღებას, რომელიც სინუსების თეორემას გამოსახავს.

მოსწავლეებს ვავალებთ პრაქტიკული ამოცანის განხილვას, რომელიც სინუსების თეორემის პრაქტიკულ გამოყენებას აღწერს.

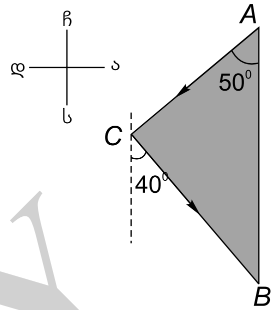
მნიშვნელოვანია სინუსების თეორემის სხვა სახით ჩამოყალიბებაც — იგი გვეხმარება სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის ფორმულის დადგენაში: მოსწავლეები დაადგენენ, რომ სამკუთხედის ყოველი გვერდის სიგრძის შეფარდება მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრის ტოლია. ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება შენიშნოს, რომ შეიძლებოდა სინუსების თეორემა ამ ფაქტის დასაბუთებითა და გამოყენებით დაგვემტკიცებინა.

ამოცანები განამტკიცებენ ცოდნას სინუსების თეორემისა და მისი გამოყენებების შესახებ; სინუსების თეორემის გამოყენებით, მოსწავლეები ადვილად დაადგენენ პასუხებს „ტესტებში“.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

სინუსების თეორემისა და კალკულატორის გამოყენებით, მოსწავლეები ხსნიან (1)-(8) ამოცანებს.

(9) ABC სამკუთხედი მართკუთხაა; $\angle C=90^0$; $AB=50$ კმ.



მოსწავლემ შეიძლება აირჩიოს სინუსების თეორემის გამოყენება: $\dfrac{50}{sin90^0}=\dfrac{AC}{sin40^0}=\dfrac{BC}{sin50^0}$.

თანაკლასელმა შეიძლება შენიშნოს, რომ მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის სინუსის განსაზღვრების თანახმად,

$$\frac{AC}{sin40^0}=50;$$

მან იგივე ტოლობა დაწერა, რადგან $sin90^0=1$. შესაბამისად, კალკულატორის ან ცხრილების გამოყენებით ვიპოვით გავლილ მანძილს:

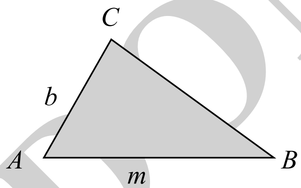
$$AC+BC=50sin40^0+50sin50^0\approx70{,}44 \text{ კმ.}$$

ამ ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლეები იმეორებენ ტრიგონომეტრიულ თანაფარდობებს მართკუთხა სამკუთხედში.

(10) სამკუთხედის C წვეროსთან კუთხე არის $\beta-\alpha$. სინუსების თეორემის თანახმად, $\dfrac{AB}{sin(\beta-\alpha)}=\dfrac{a}{sin\alpha}$; აქედან, $a=\dfrac{2sin\alpha}{sin(\beta-\alpha)}$.

(11) სინუსების თეორემის გამოყენებით, $\dfrac{15}{sin85^0}=\dfrac{25}{sin\alpha}$, აქედან, $sin\alpha\approx\dfrac{25\cdot0{,}9962}{15}>1$, რაც შეუძლებელია.

(12) შებრუნებული თეორემა: თუ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე სხვა გვერდის სიგრძისა და ამ სხვა გვერდის მოპირდაპირე კუთხის სინუსის შეფარდების ტოლია, მაშინ სამკუთხედი მართკუთხაა.



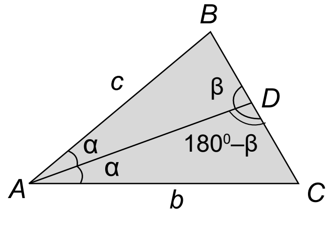
პირობის თანახმად, $m=\dfrac{b}{sinB}$;

სინუსების თეორემის თანახმად, $\dfrac{m}{sinC}=\dfrac{b}{sinB}$;

მაშასადამე, $sinC=1$; $\angle C=90^0$.

ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება სხვა ამოხსნა შემოგვთავაზოს: $\dfrac{b}{sinB}=2R$; $m=2R$, ე. ი. m ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის დიამეტრია, $\angle C$ დიამეტრზე დაყრდნობილი კუთხეა, ის მართია.

(13) ABD სამკუთხედში სინუსების თეორემის თანახმად,

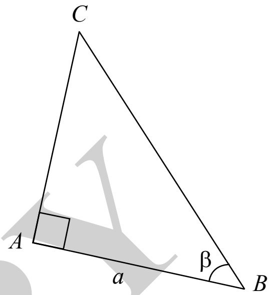


$\dfrac{c}{sin\beta}=\dfrac{BD}{sin\alpha}$; $\dfrac{BD}{c}=\dfrac{sin\alpha}{sin\beta}$; ΔADC-ში, ანალოგიური მსჯელობით, $\dfrac{CD}{sin\alpha}=\dfrac{b}{sin(180^0-\beta)}$; $\dfrac{CD}{b}=\dfrac{sin\alpha}{sin\beta}$;

მაშასადამე, $\dfrac{BD}{c}=\dfrac{CD}{b}$; $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{c}{b}$;

ეს სამკუთხედის ბისექტრისის მნიშვნელოვანი თვისებაა.

(15) $\angle A=90^0$, $\beta=25^0$, $a=50$ მ.



ა) $\dfrac{AC}{sin\beta}=\dfrac{a}{sin(90^0-\beta)}$;

$AC=a\cdot tg\beta$ (ეს ფორმულა იციან მოსწავლეებმა);

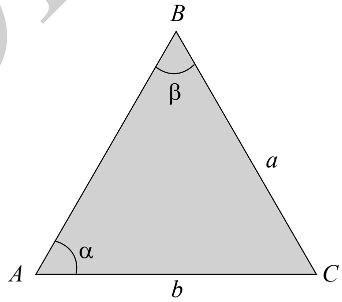
$AC=50\cdot tg25^0\approx 23,3$ (მ).

ბ) ახლა, ვთქვათ, $\angle A=96^0$, მაშინ $\angle C=180^0-25^0-96^0=59^0$.

$\dfrac{AC}{sin\beta}=\dfrac{a}{sin\angle C}$;

$AC=50\cdot\dfrac{sin25^0}{sin59^0}\approx 24,652$ (მ).

(16) შებრუნებული თეორემა: თუ სამკუთხედის გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია, მაშინ ეს გვერდებიც ტოლია.

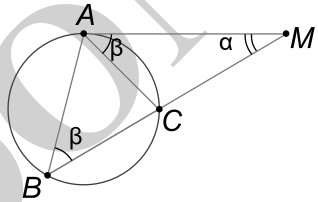


$\alpha=\beta$, მაშინ, ცხადია, ორივე მახვილი კუთხეა, $\dfrac{a}{sin\alpha}=\dfrac{b}{sin\beta}$. რადგან $sin\alpha=sin\beta$, $a=b$.

მოპირდაპირე თეორემა ტოლფასია შებრუნებული თეორემის — მოპირდაპირე თეორემაც ჭეშმარიტია.

(17) $2R=\dfrac{3}{sin145^0}$, $R\approx 2,6$ სმ.

(18)



ა) ΔAMC-დან, $\dfrac{AM}{sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{CM}{sin\beta}$; $\dfrac{AM}{CM}=\dfrac{sin(\alpha+\beta)}{sin\beta}$;

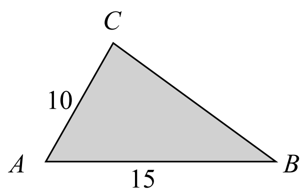
ბ) ΔABM-დან, $\dfrac{BM}{sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{AM}{sin\beta}$; $\dfrac{BM}{AM}=\dfrac{sin(\alpha+\beta)}{sin\beta}$;

მაშასადამე, $\dfrac{AM}{CM}=\dfrac{BM}{AM}$, $AM^2=MB\cdot CM$.

ე) $\Delta ABM \sim \Delta CAM$; მაშასადამე,

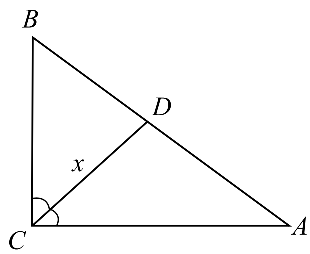
$\dfrac{AM}{CM}=\dfrac{BM}{AM}$, $AM^2=BM\cdot CM$.

△12 $sinB=\dfrac{3}{4}$; სინუსების თეორემის თანახმად,



$10:\dfrac{3}{4}=15:sinC$,

საიდანაც $sinC=\dfrac{15\cdot\frac{3}{4}}{10}=\dfrac{45}{40}>1$, რაც შეუძლებელია.



△13 პირობით, $BC=6$ სმ, $AC=8$ სმ, მაშინ ჰიპოტენუზა არის 10 სმ.

$sinA=\dfrac{6}{10}=0{,}6.$

ΔADC-დან გვაქვს:

$\dfrac{x}{sinA}=\dfrac{AC}{sin\angle ADC}$; $x=\dfrac{8sinA}{sin(A+45^0)}$; $sinA=\dfrac{6}{10}=0{,}6$;

ახლა შეიძლება ცხრილით ვისარგებლოთ:

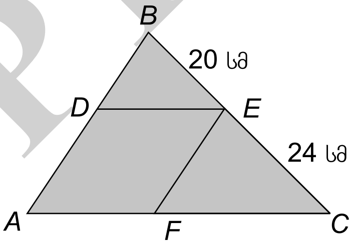
$\angle A\approx 36{,}87^0$, $sin(A+45^0)\approx sin(81{,}87^0)\approx 0{,}9899$, $x\approx 4{,}85$ (სმ).

ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება ამოხსნის ასეთი გზა შემოგვთავაზოს: ბისექტრისის თვისების მიხედვით, $\dfrac{m}{10-m}=\dfrac{8}{6}$; ($AD=m$).

საიდანაც, $m=\dfrac{40}{7}$.

სინუსების თეორემით $\dfrac{m}{sin45^0}=\dfrac{x}{sinA}$; ანუ, $\sqrt{2}m=\dfrac{5x}{3}$;

$x=\dfrac{24\sqrt{2}}{7}$.



14 კლასში განხილულია ბისექტრისის თვისება, ეს თვისება სინუსების თეორემის გამოყენებითაა მიღებული (ამოცანა 13).

AE რომბის დიაგონალია, მაშასადამე, A კუთხის ბისექტრისაა, ამიტომ გვაქვს:

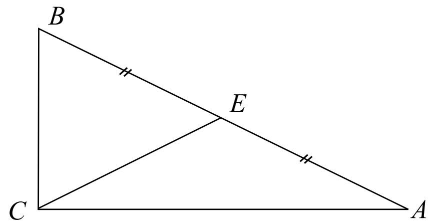
$$\frac{AB}{AC}=\frac{20}{24};$$

მაგრამ $AB+AC=99-44=55$;

$$\frac{AB}{AC}=\frac{20}{24};\ \frac{AB+AC}{AC}=\frac{44}{24};\ \frac{55}{AC}=\frac{44}{24};\quad AC=\frac{55\cdot 24}{44}=30 \text{ (სმ)}.$$

$AB=55-30=25$ (სმ).

ამოცანა შეიძლება სამკუთხედების მსგავსების გამოყენებითაც ამოიხსნას.



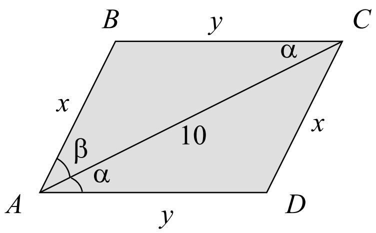
17 აქ ვიყენებთ სინუსების თეორემის მეორე ფორმულას: $2R=\dfrac{8{,}3}{sin110^0}$.

18 CE მედიანაა, მაშასადამე, $AB=2CE=25$ (სმ). ბისექტრისის თვისების გამოყენებით, აღვნიშნოთ: $AC=4x$; $BC=3x$;

$16x^2+9x^2=25^2$; $x^2=25$, $x=5$;

$AC=20$ (სმ); $BC=15$ (სმ).

19



ვიყენებთ სინუსების თეორემას:

$\dfrac{y}{sin\beta}=\dfrac{10}{sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{x}{sin\alpha}$;

$y=\dfrac{10sin\beta}{sin(\alpha+\beta)}$;

$x=\dfrac{10\cdot sin\alpha}{sin(\alpha+\beta)}$.

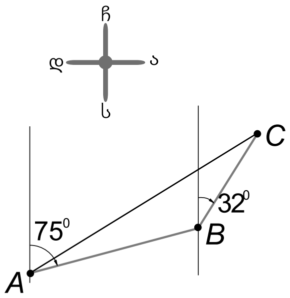
2.2. კოსინუსების თეორემა

ახალი საკითხის განხილვა, რომელიც უკავშირდება სამიზნე ცნებას — ფუნქციას — და მოსალოდნელ შედეგებს: მოსწავლემ უნდა შეძლოს ფუნქციური კავშირის დამყარება, ფუნქციის გამოყენება სხვადასხვა კონტექსტში ცვლილებათა გასაანალიზებლად და რეალური მოვლენების მოდელირებისთვის (მათ. საშ. 3); ტრიგონომეტრიული ფუნქციების პრაქტიკული გამოყენებების მაგალითების განხილვა წინა თავში დავიწყეთ. პირველ პარაგრაფში ვაჩვენეთ, რომ სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის დამოკიდებულებები სინუსების თეორემით შეიძლება აღვწეროთ. სინუსების თეორემის გამოყენებით, შეიძლება პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნა — როცა რეალური სიტუაცია აღიწერება სამკუთხედის გვერდებსა და მოპირდაპირე კუთხეების სინუსებს შორის თანაფარდობის გამოყენებით. სასწავლო პროცესი მოსწავლეთა ცოდნაზე დაყრდნობით ახალი ცოდნის შეძენაზეა ორიენტირებული; ამიტომ მნიშვნელოვანია ცოდნის გააქტიურება — კერძო სახის სამკუთხედის (მართკუთხა სამკუთხედის) განხილვით ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გახსენება, სინუსების თეორემის ჩამოყალიბება და მნიშვნელობის მითითება; სინუსების თეორემის პრაქტიკული გამოყენებების აღნიშვნა — საშინაო დავალების შემოწმების პროცესი მოიცავს აღნიშნულ აქტივობებს. სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი ამოცანა ტბის „სიგრძის" პოვნის შესახებ საშუალებას აძლევს მასწავლებელს ყურადღება გაამახვილოს იმ შემთხვევაზე, როცა მოვლენის მათემატიკური მოდელი დაკავშირებულია სამკუთხედის ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის საშუალებით ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდის პოვნასთან — საშუალება გვაქვს „მიუწვდომელი" მანძილის მნიშვნელობის გამოთვლის „მისაწვდომი" სიდიდეების საშუალებით; ტბის „სიგრძის" გამოთვლა შესაძლებელია ტბაზე გაზომვების ჩატარების გარეშე — რაიმე შერჩეული წერტილიდან ტბის ორი მისაწვდომი ნაპირის წერტილებამდე მანძილებისა და შერჩეული წერტილიდან ამ ნაპირებისკენ მიმართულებებს შორის კუთხის სიდიდის გამოთვლის გამოყენებით. ამ პრობლემის გადაწყვეტის გზას იძლევა კოსინუსების თეორემა. დასაბუთებისთვის შერჩეულია ე. წ. კოორდინატთა მეთოდი — კოორდინატთა მეთოდის გამოყენების ჩვევების დაუფლება მოსწავლეებს დაეხმარება სხვა ამოცანების ამოხსნის დროსაც. ამასთანავე, გამოყენებულია სრული ინდუქციის მეთოდი — განხილულია ყველა შემთხვევა — მართი, მახვილი და ბლაგვი კუთხეების შემთხვევები. მასწავლებელს შეუძლია დამტკიცების სხვა ხერხის ჩვენებაც — პითაგორას თეორემის საშუალებით. ამ მეთოდს მოსწავლეები 11 ამოცანის კლასში ამოხსნისას გაეცნობიან.

მნიშვნელოვანია კოსინუსების თეორემის სხვადასხვა ფორმით წარმოდგენა — მოცემული გვერდის კვადრატის გამოსახვა დანარჩენი გვერდებისა და მოცემული გვერდის მოპირდაპირე კუთხის სინუსით; სამკუთხედის კუთხეების კოსინუსების გამოსახვა სამი გვერდით. მნიშვნელოვანია იმის გააზრება, რომ სამკუთხედის სამი ელემენტის გამოყენებით, მაგალითად, ორი გვერდითა და კუთხით, ან სამი გვერდით ვპოულობთ უცნობ ელემენტს, თუმცა შეიძლება დადგეს ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი.

კოსინუსების თეორემისა და ამ თეორემის გამოყენებაზე ცოდნას მოსწავლეები ამოცანებით განიმტკიცებენ. ამ ამოცანების ამოხსნა მოსწავლეს უყალიბებს სტრუქტურირებულ და გამთლიანებულ ხედვას ტრიგონომეტრიის გამოყენებითი ასპექტების შესახებ.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:



2 $\angle ABC=180^0-75^0+32^0=137^0$.

ΔABC-ში ვიყენებთ კოსინუსების თეორემას:

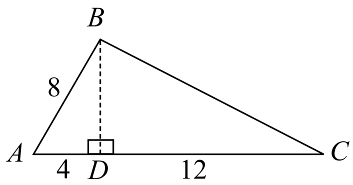
$AC^2=670^2+550^2-2\cdot 670\cdot 550cos137^0$.

ტრიგონომეტრიული ცხრილების ან კალკულატორის გამოყენებით, ვპოულობთ:

$cos137^0=-cos43^0\approx -0{,}7314$;

$AC^2\approx 1290407{,}678$; $AC\approx 1136$ (კმ).

3



ა) ΔABD-დან, $BD^2=8^2-4^2=48$,

ΔBDC-დან, $BC^2=48+144=192$, $BC=8\sqrt{3}$ (სმ).

ბ) ΔABD-დან, $cosA=\dfrac{4}{8}=0{,}5$;

კოსინუსების თეორემის გამოყენებით,

$BC^2=8^2+16^2-2\cdot 8\cdot 16\cdot 0{,}5=192$;

$BC=8\sqrt{3}$ (სმ).

4 პირობის თანახმად, სამკუთხედის გვერდები შეიძლება ასე აღვნიშნოთ: $5x$; $12x$; $13x$. თუ მოსწავლეები შეამჩნევენ, რომ $(5x)^2+(12x)^2=(13x)^2$, მაშინ პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემის თანახმად, უდიდესი კუთხე მართია.

შეიძლება კოსინუსების თეორემის გამოყენებაც; თუ უდიდესი კუთხე არის α, მაშინ

$$cos\alpha=\frac{(5x)^2+(12x)^2-(13x)^2}{2\cdot 5x\cdot 12x}=0,\ \alpha=\frac{\pi}{2}.$$

5 კოსინუსების თეორემის თანახმად, $81=16+36-48cos\alpha$, აქედან,

$cos\alpha\approx -0{,}6042$

$cos(180^0-\alpha)\approx 0{,}6042$;

$180^0-\alpha = 52^050'$,

$\alpha=180^0-52^050'=127^010'$.

6 $PR=\sqrt{100+256}=2\sqrt{89}$;

$PQ=QR=0{,}5PR=\sqrt{89}$;

QS შუახაზია, $QS=5$,

$RS=\sqrt{100+64}=2\sqrt{41}$.

7 ვიყენებთ კოსინუსების თეორემას:

$BD^2=a^2+b^2-2abcos\alpha$, (1)

$BD=\sqrt{a^2+b^2-2abcos\alpha}$,

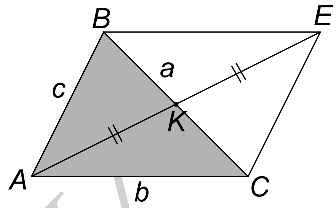
$AC^2=a^2+b^2-2abcos(180^0-\alpha)$, (2)

$AC^2=a^2+b^2+2abcos\alpha$,

$AC=\sqrt{a^2+b^2+2abcos\alpha}$.

(1) და (2) ტოლობების შეკრებით, მივიღებთ: $BD^2+AC^2=2(a^2+b^2)$.

8 AK მედიანაა, $AK=m_a$.



ამოცანის პირობის მიხედვით, აგებული $ABEC$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია (ოთხკუთხედის დიაგონალები გადაკვეთისას შუაზე იყოფა) და ვიყენებთ წინა ამოცანის შედეგს:

$(2m_a)^2+BC^2=2AC^2+2AB^2$;

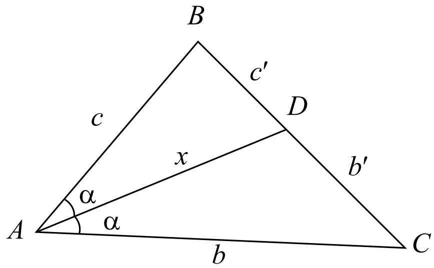
$4m_a^{\,2}=2b^2+2c^2-a^2$;

$m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a}$.

კლასში, კვლავ მოსწავლეთა აქტიური ჩართულობით, ვხსნით **7** და **8** ამოცანებს, ყურადღებას ვამახვილებთ და სიტყვიერად ვაყალიბებთ მიღებულ შედეგებს.

9 ვიყენებთ წინა ამოცანაში მიღებულ ფორმულას და ვპოულობთ მედიანის სიგრძეს.

10 **7** და **8** ამოცანების შედეგებთან ერთად **10** ამოცანის შედეგიც ხშირად გამოიყენება ამოცანების ამოხსნისას. **10** ამოცანის შედეგის მიხედვით, სამკუთხედის კუთხის ბისექტრისა გამოსახულია ამ კუთხის მიმდებარე გვერდებისა და მოპირდაპირე გვერდზე ბისექტრისით მიღებული მონაკვეთების საშუალებით: $AD^2=bc-b'c'$.



ABD და ADC სამკუთხედებში, კოსინუსების თეორემის გათვალისწინებით, გვაქვს:

$$(c')^2=c^2+x^2-2cxcos\alpha; \qquad (1)$$

$$(b')^2=b^2+x^2-2bxcos\alpha. \qquad (2)$$

ვცდილობთ, გამოვრიცხოთ $cos\alpha$; (1) ტოლობის ორივე მხარეს ვამრავლებთ b-ზე, (2) ტოლობის ორივე მხარეს — c-ზე, შემდეგ მიღებული ტოლობებიდან პირველს გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ:

$$b(c')^2-c(b')^2=bc^2+bx^2-cb^2-cx^2;$$

$$b(c')^2-c(b')^2=bc^2-cb^2+x^2(b-c);$$

$$b(c')^2-c(b')^2=bc(c-b)+x^2(b-c);$$

აქ ვითვალისწინებთ: $\dfrac{c}{b}=\dfrac{c'}{b'}$, $bc'=cb'$,

$$cb'c'-bc'b'=bc(c-b)+x^2(b-c),$$

$$b'c'(c-b)=bc(c-b)-x^2(c-b). \qquad (3)$$

თუ $b=c$, მაშინ $b'=c'$ და მივიღებთ:

$AD^2=b^2-(b')^2$ (პითაგორას თეორემით).

ე. ი. მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა. თუ $b\neq c$, მაშინ (3)-დან გვაქვს:

$$b'c'=bc-x^2;$$

$$x^2=bc-b'c'.$$

11 განვიხილოთ პირველი შემთხვევა:

$a^2=h^2+DC^2=c^2-AD^2+(b-AD)^2=c^2+b^2-2b\cdot AD$;

ΔABD-დან $AD=c\cos A$; მივიღებთ

$a^2=c^2+b^2-2bc\cos A$.

განვიხილოთ მესამე შემთხვევა:

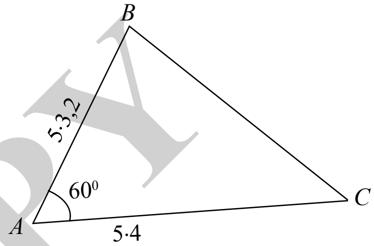
$a^2=h^2+(b+AD)^2=c^2-AD^2+b^2+2b\cdot AD+AD^2=c^2+b^2+2b\cdot AD$;

$AD=c\cos(180^0-\angle A)=-c\cos A$.

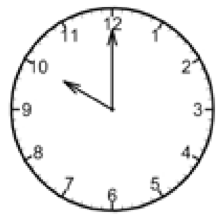
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

მეორე შემთხვევაში,

$a^2=c^2+b^2=c^2+b^2-2bc\cos 90^0=c^2+b^2-2bc\cos A$.



12 მათემატიკური მოდელი სურათზეა გამოსახული, საძიებელი სიდიდე BC გვერდის სიგრძეა, რომელსაც კოსინუსების თეორემის გამოყენებით ვიპოვით.



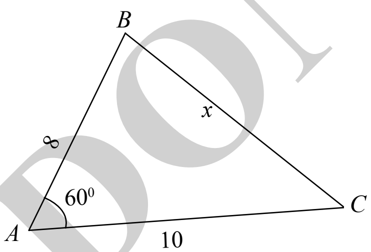
13 აქ გასათვალისწინებელია, რომ 10 საათზე ისრებს შორის კუთხე 60^0-ია. წვეროებს შორის მანძილს კოსინუსების თეორემის გამოყენებით ვიპოვით.

14 სამი გვერდით ვიპოვით უდიდესი კუთხის კოსინუსს; ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$\cos\alpha=\frac{13^2+14^2-15^2}{2\cdot13\cdot14}=\frac{5}{13},\ \sin\alpha=\frac{12}{13}.$$

15 თუ $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$, პირობის თანახმად,

$\angle A+\angle C=2\angle B$;



$3\cdot\angle B=180^0,\qquad \angle B=60^0,$

$\angle C>60^0,\ \angle A<60^0.$

მაშასადამე, 8 სმ და 10 სმ სიგრძის გვერდებს შორის კუთხის გრადუსული ზომა 60^0-ია.

„საშუალო“ გვერდს კოსინუსების თეორემით ვიპოვით:

$x^2=8^2+10^2-2\cdot8\cdot10\cdot\frac{1}{2}=64+100-80=84;$

$x=2\sqrt{21}$.

საშინაო დავალების 1 - 7 ამოცანები, კოსინუსების თეორემის გამოყენებით, ადვილად იხსნება.

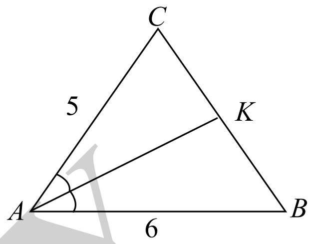
მაგალითად, 5 ამოცანაში, საკმარისია კუთხის სინუსით ვიპოვოთ ამ კუთხის კოსინუსი, შემდეგ შესაძლებელი იქნება კოსინუსების თეორემის გამოყენება.

ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლემ უნდა გამოიყენოს კლასში მიღებული შედეგი. მაგალითად, 9 ამოცანის ამოხსნისას ვიყენებთ ბისექტრისის თვისებას:

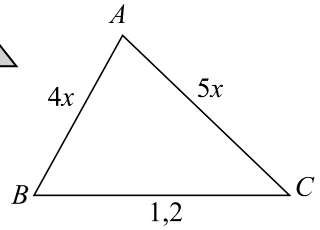
$\frac{CK}{5-CK}=\frac{5}{6}$, ვიპოვით CK და KB-ს: $CK=\frac{25}{11}$, $KB=\frac{30}{11}$,

შემდეგ ვიყენებთ ბისექტრისის ფორმულას:

$AK^2=5\cdot 6-CK\cdot KB$; $AK=\frac{24\sqrt{5}}{11}$ (სმ).



10

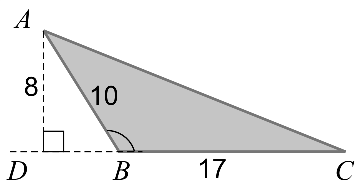


$R=1$, $2R=2$; $2R=\frac{1,2}{sinA}$,

$sinA=\frac{1,2}{2}=0,6$, $cosA=0,8$.

$1,2^2=(4x)^2+(5x)^2-2\cdot 4x\cdot 5x\cdot 0,8$.

ამ ტოლობიდან ვპოულობთ x-ს; შესაბამისად, BC-ს და AC-ს.



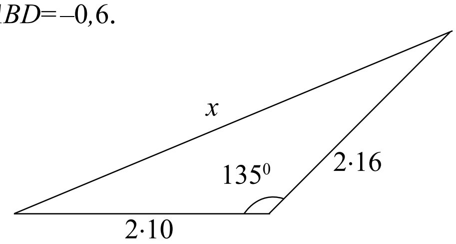
11 ა) $DB=6$;

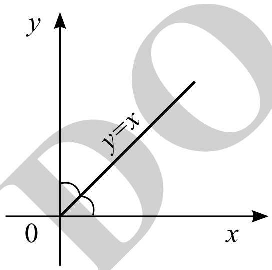
$AC^2=8^2+23^2$;

$AC=\sqrt{593}$ (სმ).

ბ) გავითვალისწინოთ, რომ $cos\angle ABC=-cos\angle ABD=-0,6$.

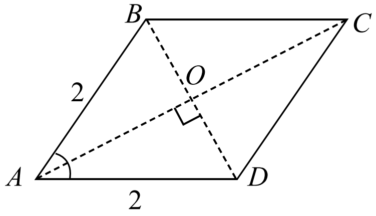
12 ჩრდილო-აღმოსავლეთის მიმართულება დასავლეთის მიმართულებასთან 135^0-იან კუთხეს ადგენს. ეს საკითხი ადრეც გვქონდა განხილული, როცა საკოორდინატო სიბრტყეზე ჩრდილო აღმოსავლეთის მიმართულებით მოძრაობას $y=x$ სხივზე მოძრაობით განვსაზღვრავდით.





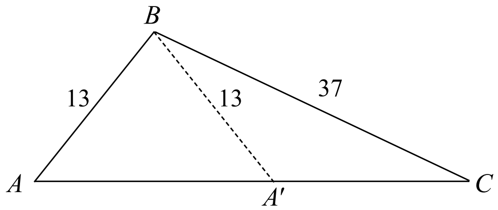
მანძილს კოსინუსების თეორემით ვიპოვით.

13 $sinA=\frac{12}{13}$, მაშინ $cosA=\frac{5}{13}$.



BD დიაგონალს, კოსინუსების თეორემის გამოყენებით, ABD სამკუთხედიდან ვიპოვით. მეორე დიაგონალის პოვნა სხვადასხვა ხერხით შეიძლება — კვლავ კოსინუსების თეორემით ACD სამკუთხედიდან, ან AOD მართკუთხა სამკუთხედში პითაგორას თეორემის გამოყენებით, ან ვისარგებლოთ თეორემით: პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამი გვერდების კვადრატების ჯამის ტოლია.

14 $sinC=\frac{12}{37}$.



C კუთხე არ არის უდიდესი გვერდის მოპირდაპირე კუთხე, ამიტომ $\angle C<90^0$;

$$cosC=\sqrt{1-\left(\frac{12}{37}\right)^2}=\sqrt{\frac{25\cdot49}{37^2}}=\frac{35}{37};$$

ახლა ვიყენებთ კოსინუსების თეორემას:

$169=37^2+AC^2-2\cdot37\cdot AC\cdot cosC$;

$AC^2-70\cdot AC+1200=0$, აქედან, $AC=40$ ან $AC=30$.

ამ ამოცანას მეტი ყურადღება დავუთმოთ. მოსწავლეები შეიძლება დაინტერესდნენ, რატომ მივიღეთ AC გვერდის სიგრძისთვის ორი მნიშვნელობა? $AC=30$ და $AC=40$. ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად, საინტერესოა A კუთხის სინუსის პოვნა: სინუსების თეორემის გამოყენებით, $\frac{37}{sinA}=\frac{13}{sinC}$, $sinA=(37\cdot\frac{12}{37}):13$; $sinA=\frac{12}{13}$; არსებობს ორი კუთხე, რომლის სინუსი არის $\frac{12}{13}$; ერთი მახვილია და $cosA=\frac{5}{13}$, მეორე ბლაგვია და $cosA=-\frac{5}{13}$. ამოცანის პირობა არ გამორიცხავს ამ ორ შემთხვევას. პირველი შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა საძიებელი გვერდი — $AC=40$ სმ (სურათზე — ABC სამკუთხედი); მეორე შემთხვევაში მესამე გვერდი 30 სმ-ია ($\Delta A'BC$; $\angle A'>90^0$).

15 $cos\alpha=\frac{20^2+21^2-25^2}{2\cdot20\cdot21}=\frac{9}{35}$.

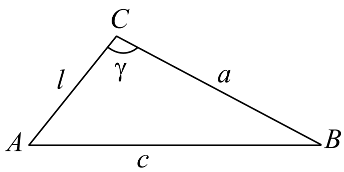
უდიდესი α კუთხე მახვილია, შესაბამისად, სამკუთხედი მახვილკუთხაა.

2.3. დამოკიდებულებები სამკუთხედის კუთხეებსა და გვერდებს შორის

წინარე ცოდნის გააქტიურება პითაგორას თეორემის, სინუსებისა და კოსინუსების თეორემების ჩამოყალიბებით და მათი სხვადასხვა პრაქტიკული გამოყენების წარმოდგენით მიმდინარეობს. ახალ საკითხზე გადასვლაც პრაქტიკული ამოცანის განხილვით მიმდინარეობს. ყოველდღიურ ცხოვრებაში ხშირად გვხვდება შემთხვევა, როცა დასკვნა ცნობილი თეორემის მიხედვით კი არა, არამედ ამ თეორემის შებრუნებული თეორემის გამოყენებით კეთდება; თუმცა, ხშირად შეცდომით აღინიშნება, რომ დასკვნა მოცემული თეორემიდან გამომდინარეობს. ანალოგიური ლოგიკური შეცდომის გამოსწორებას ვცდილობთ, როცა განვიხილავთ პრაქტიკულ მაგალითს — არის თუ არა ალამი აღმართული მოედნის გვერდების მართობულად; არის თუ არა სამკუთხედი მართკუთხა, თუ მისი ერთი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია. „თუ სამკუთხედის ერთი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის

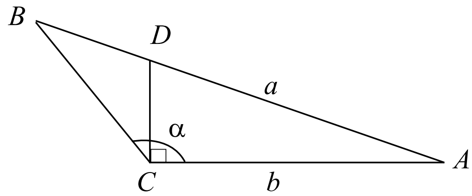
ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედი მართკუთხაა“ — ეს წინადადება ჭეშმარიტია, რა თეორემიდან გამომდინარეობს ამ წინადადების ჭეშმარიტება? მნიშვნელოვანია, რომ მოსწავლემ კარგად გაიაზროს — აღნიშნული წინადადების ჭეშმარიტება გამომდინარეობს პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემიდან.

კოსინუსების თეორემის გამოყენებით, მოსწავლეები ჩამოაყალიბებენ სამ წინადადებას, რომელიც ყველა სამ შემთხვევას ეხება: თუ კუთხე $\gamma=90^0$, მაშინ მისი მოპირდაპირე გვერდის კვადრატი სხვა ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია; თუ $\gamma>90^0$ (γ ბლაგვია), მაშინ მოპირდაპირე გვერდის კვადრატი მეტია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე; თუ $\gamma<90^0$ (γ მახვილია), ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდის კვადრატი ნაკლებია დანარჩენი ორ გვერდის კვადრატების ჯამზე. ამ შემთხვევაში ყველა შებრუნებული თეორემა სწორია. სახელმძღვანელოში აღნიშნულია, რომ თითოეული შებრუნებული თეორემა საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით მტკიცდება. მოსწავლემ უნდა შეძლოს შებრუნებული თეორემების დამტკიცება; „დებულების დასაბუთების პირდაპირი და არაპირდაპირი მეთოდების ფლობით, ლოგიკური დასკვნების გამოტანა“ (მათ. საშ. 9). მაგალითად, ვთქვათ, $c^2>a^2+b^2$, ვასაბუთებთ: $\gamma>90^0$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, $\gamma=90^0$ ან $\gamma<90^0$. თუ $\gamma=90^0$, პითაგორას პირდაპირი თეორემის თანახმად, $c^2=a^2+b^2$ — მივიღეთ წინააღმდეგობა; თუ $\gamma<90^0$, მაშინ $c^2<a^2+b^2$ (კოსინუსების თეორემით) — კვლავ წინააღმდეგობა მივიღეთ. დაავალეთ სხვადასხვა მოსწავლეს კლასს წარუდგინოს შებრუნებული თეორემების დამტკიცება.



საკითხის განხილვას ვამთავრებთ სინუსების თეორემის ერთი გამოყენებით: თუ სამკუთხედში რომელიმე კუთხე, ვთქვათ, α, მეტია მეორე β კუთხეზე, მაშინ α-ს მოპირდაპირე a გვერდი მეტია β-ს მოპირდაპირე b გვერდზე. თუ α ბლაგვია, მაშინ β მახვილია და სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა, უდიდესი გვერდი ბლაგვი კუთხის მოპირდაპირე გვერდია. თუ α და β მახვილი კუთხეებია და $\alpha>\beta$, მაშინ $\sin\alpha>\sin\beta$ და, სინუსების თეორემის თანახმად, $a>b$. წინა შემთხვევის ანალოგიურად, სამივე შემთხვევა ($\alpha>\beta$, $\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$) ამოწურავს ყველა შესაძლო შემთხვევას და, საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით, მტკიცდება სამივე თეორემის შებრუნებული თეორემა. მოსწავლეებს შეიძლება ვთხოვოთ იმ შემთხვევის წარმოდგენაც, როცა ბლაგვკუთხა სამკუთხედში უდიდესი გვერდი ბლაგვი კუთხის მოპირდაპირე გვერდია.

სურათზე $\angle ACB=\alpha$, $\alpha>90^0$, $AB=a$, $CD\perp AC$.



სურათიდან კარგად ჩანს, რომ $AD>b$, $a>b$.

მე-8 კლასის კურსში ადვილად მტკიცდებოდა შებრუნებული თეორემები:

თუ $a>b$, მაშინ $\alpha>\beta$,

თუ $a<b$, მაშინ $\alpha<\beta$,

თუ $a=b$, მაშინ $\alpha=\beta$.

მაშასადამე, სწორია ყველა ის თეორემა, რომლებიც თეორემის სახით არის მოცემული სახელმძღვანელოში და სინუსების თეორემის გამოყენებით დავასაბუთეთ.

„ტესტებში“ პასუხების მოძიება სამკუთხედში გვერდებსა და კუთხეებს შორის დამოკიდებულებების ცოდნას ეფუძნება.

(4) „ტესტში“ პასუხის მოძიებას შეიძლება მსჯელობის ჩატარება დასჭირდეს. თუ ცნობილია გვერდი და მისი მოპირდაპირე კუთხე, მაშინ ვიპოვით შემოხაზული წრეწირის რადიუსს; $2R=\frac{a}{sin\alpha}$, a=10 სმ, $\alpha=60^0$.

ხოლო გვერდი და მიმდებარე კუთხე ვერ განსაზღვრავს ცალსახად სამკუთხედის დანარჩენ გვერდებს, ე. ი. ვერც შემოხაზული წრეწირის რადიუსს — დასახელებული გვერდისა და მიმდებარე კუთხის მქონე სამკუთხედების რაოდენობა უსასრულოა.

ანალოგიური მსჯელობა სჭირდება (5) „ტესტში“ პასუხის შერჩევას. მოსწავლეებმა კარგად იციან, რომ „ტესტის“ სავარაუდო პასუხებიდან მხოლოდ ერთი უნდა იყოს სწორი, ამიტომ სწორი პასუხის პოვნის შემთხვევაში შეიძლება სხვა პასუხებზე აღარ ვიმსჯელოთ; თუმცა, ზოგიერთი მაღალი მზაობის მოსწავლე კვლავ აგრძელებს მსჯელობას — "იქნებ „ტესტის“ შემდგენლებს შეცდომა მოუვიდათ და ერთზე მეტი პასუხია სწორი? ან იქნებ ყველა პასუხი არასწორია? შევამოწმოთ, განვიხილოთ სხვა პასუხებიც“.

მსჯელობას მოითხოვს (6) „ტესტიც“.

კოსინუსი I მეოთხედში კლებადი ფუნქციაა, ამასთანავე, $\frac{3}{4}=0,75$, $\frac{4}{5}=0,8$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\approx0,71$. ამრიგად, $\frac{3}{4}>\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{4}{5}>\frac{\sqrt{2}}{2}$, მაშასადამე, $\angle A<\frac{\pi}{4}$, $\angle B<\frac{\pi}{4}$, მაშასადამე, $\angle C>\frac{\pi}{2}$, C კუთხე ბლაგვია.

საშინაო დავალების „ტესტები“ ანალოგიურია. კლასში ვთხოვოთ მოსწავლეებს, დაასაბუთონ იმ პასუხების სისწორე, რომლებიც შეარჩიეს. მაგალითად, △6 ტესტში გვაქვს: $\frac{1}{4}<\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ ამიტომ $\angle A<\frac{\pi}{4}$, $\angle B<\frac{\pi}{4}$ (სინუსი I მეოთხედში ზრდადია), მაშასადამე, $\angle C>\frac{\pi}{2}$, C ბლაგვი კუთხეა. მხოლოდ ორივე პირობაა საკმარისი, რომ დავადგინოთ: სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა.

ცალკე თითოეული პირობა მიანიშნებს, რომ სამკუთხედში ერთი კუთხე ნაკლებია $\frac{\pi}{4}$-ზე, რაც დანარჩენი კუთხეების სიდიდეზე წარმოდგენას არ გვიქმნის.

ანალოგიურია △7 „ტესტი“.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

(7) თუ ერთ-ერთი გვერდის სიგრძის კვადრატი ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე, მაშინ ამ გვერდის მოპირდაპირე კუთხე მახვილია; მაგრამ ბლაგვი, ან მართი შეიძლება იყოს სხვა კუთხე.

(8) ვთქვათ, მესამე გვერდის სიგრძე არის x სმ. მაშინ, ცხადია, $6<x<30$; $x>18$, $x\in\mathbf{N}$.

ა) ამ რიცხვებს შორის უდიდესი მთელი რიცხვია 29.

ბ) განვიხილოთ a^2+b^2 (a=12, b=18);

$a^2+b^2=144+324=468$.

სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა, თუ $c^2>a^2+b^2$. c=22 უმცირესი მთელია ისეთ რიცხვებს შორის, რომლებისთვისაც $c^2>468$.

პასუხი: c=22.

(9) $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot \cos A.$

რადგან BC უდიდესი გვერდია და სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა, ამიტომ $\angle A>90^0$, $\cos A<0$, $\cos^2 A=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$, $\cos A=-\frac{2}{3}$.

მაშასადამე, $BC^2=909$; $BC=3\sqrt{101}$ სმ.

(10) a და b გვერდების მოპირდაპირე კუთხეების ყველა შესაძლო მნიშვნელობების განხილვის შემდეგ მივიღებთ: რადგან სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა, ერთ-ერთი კუთხის ზომა 120^0-ია, $\sin 120^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, მეორე კუთხის ზომაა 45^0; $\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$; მესამე კუთხის ზომაა 15^0. მაშასადამე, უდიდესი გვერდია a, უმცირესი — c. გამოირიცხება შემთხვევები: (60^0; 45^0) — ამ შემთხვევაში სამკუთხედი მახვილკუთხაა; (60^0; 135^0) — ასეთი სამკუთხედი არ არსებობს.

(11) ვიპოვოთ გვერდები: $AB=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$; $AC=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$; $BC=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

უდიდესი გვერდის სიგრძე $\sqrt{58}$-ის ტოლია.

$AB^2+BC^2=58=AC^2$, ამიტომ სამკუთხედი მართკუთხაა.

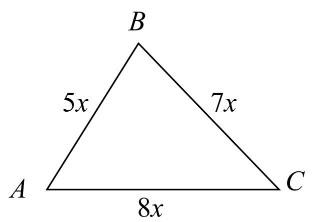
△9 თუ მესამე გვერდია a, მაშინ უნდა გვქონდეს: $a^2<15^2+18^2$, $a^2<549$, რადგან $a\in \mathbf{N}$, ამიტომ a-ს უდიდესი შესაძლო მნიშვნელობა არის 23. უდიდესი გვერდი იქნება a, ამიტომ დანარჩენი შემთხვევების შემოწმება აღარ არის საჭირო.

△11 თუ $\sin B=\frac{3\sqrt{5}}{7}$ და B ბლაგვია, მაშინ $\cos B=-\sqrt{1-\frac{45}{49}}=-\frac{2}{7}$.

კოსინუსების თეორემის გამოყენებით, $54=49+BC^2+14\cdot\frac{2}{7}\cdot BC$, აქედან $BC=1$ (სმ).

△12 $(8x)^2=64x^2$;

$25x^2+49x^2=74x^2$;

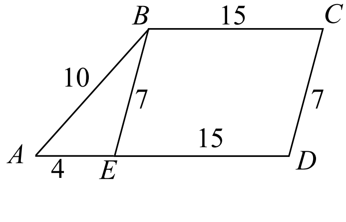


$AC^2<AB^2+BC^2$; სამკუთხედი მახვილკუთხაა. უმცირესი C კუთხისთვის, გვაქვს:

$\cos C=\frac{64x^2+49x^2-25x^2}{2\cdot 8x\cdot 7x}=\frac{11}{14}$;

$\sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}$; უდიდესი B კუთხისთვის გვექნება:

$\cos B=\frac{25x^2+49x^2-64x^2}{2\cdot 5x\cdot 7x}=\frac{1}{7}$; $\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.



△13 $BE||CD$; განვიხილოთ ΔABE; $AB=10$, $BE=7$, $AE=4$.

ამ სამი გვერდით, კოსინუსების თეორემის გამოყენებით, ვიპოვით $\cos A$-ს (და $\cos\angle AEB$-ს). სახელდობრ, ΔABE-ში

$49=100+16-80\cos A$, $\cos A=\frac{67}{80}$, $\angle A\approx 33^0$,

$100=49+16-56\cos\angle AEB$, $\cos\angle AEB=-\frac{35}{56}=-0{,}625$.

$\angle AEB\approx 129^0$, $\angle D=\angle AEB\approx 129^0$, $\angle B\approx 180^0-33^0=147^0$, $\angle C\approx 180^0-129^0=51^0$.

ეს ამოცანა შეიძლება სხვა ხერხითაც ამოიხსნას — ორივე სიმაღლის გავლებისა და მიღებული სამკუთხედების განხილვით.

2.4. სამკუთხედის ფართობის ფორმულები. სამკუთხედში ჩახაზული და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსების ფორმულები

წინარე ცოდნის გააქტიურება შეიძლება შემდეგი კითხვებისა და მათზე პასუხების განხილვით წარიმართოს:

— გავიხსენოთ სიდიდე, რომელსაც ფართობი ვუწოდეთ და ბრტყელ გეომეტრიულ ფიგურებს შევუსაბამეთ; როგორ შეიძლება აღვწეროთ ფართობის გაზომვის პროცესი?

— რა ფორმულებით ვითვლიდით კვადრატის, მართკუთხედის, სამკუთხედის, პარალელოგრამისა და ტრაპეციის ფართობს?

— რა თვისებები აქვს მრავალკუთხედის ფართობს?

ამ კითხვებზე პასუხების განხილვაში ჩვენც უნდა ჩავერიოთ, კორექტივები შევიტანოთ და შევაჯამოთ მოსწავლეთა პასუხები. შემდეგი საკითხი, რომლის გახსენებაც ინტერაქტიულ რეჟიმში მიმდინარეობს, სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირებია.

— რას ეწოდება სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი? შეიძლება თუ არა, რომ ყოველ სამკუთხედზე შემოიხაზოს წრეწირი? სად მდებარეობს სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი? შეგიძლიათ დაასაბუთოთ ნათქვამი?

— რას ეწოდება სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი? შეიძლება თუ არა, რომ ყოველ სამკუთხედში ჩაიხაზოს წრეწირი? სად მდებარეობს ჩახაზული წრეწირის ცენტრი?

— ახლა ყურადღება გავამახვილოთ სამკუთხედის ფართობის ფორმულებზე; შევეცადოთ, მივიღოთ ახალი ფორმულები. დავწეროთ თქვენთვის ნაცნობი ფორმულა.

ახალ მასალაზე გადასვლა მიმდინარეობს სტანდარტის მოთხოვნების შესაბამისად. მოსწავლემ კარგად უნდა გაიაზროს, რომ ფართობის გამოთვლის პროცესი, ამ სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლით გამოსახვის პროცესია; „მოსწავლემ უნდა შეძლოს რეალურ ცხოვრებაში სხვადასხვა საკითხის განხილვისას სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით" — სტანდარტის ამ მოთხოვნის შესაბამისად, გამოგვყავს ფართობის წარმოდგენის სხვადასხვა ფორმულა: მაგალითად, ფორმულა, რომლითაც სამკუთხედის ფართობს ვპოულობთ ორი გვერდითა და მათ შორის კუთხის სინუსით; ფორმულა, რომლითაც სამკუთხედის ფართობს გამოვთვლით სამი გვერდით. ფართობის მიღებულ ფორმულებს ვიყენებთ სამკუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსების გამოსათვლელად. მოსწავლეებმა კარგად უნდა გაიაზრონ, რომ სამკუთხედის სამი ელემენტის მიხედვით (მათგან ერთ-ერთი მაინც გვერდი უნდა იყოს) ყოველთვის შეიძლება სამკუთხედის ფართობის პოვნა, სამკუთხედზე შემოხაზული და სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირების რადიუსების პოვნა. ამოცანების ამოხსნის კვალობაზე მოსწავლეები დაიმახსოვრებენ ამ ფორმულებს. ამას ხელს უწყობს „ტესტებში" სწორი პასუხების მოძიებაც.

საინტერესოა 3 „ტესტზე" პასუხის დადგენა. ამ სამკუთხედებს ტოლი კუთხეები აქვს. მაშასადამე, ამ კუთხეების სინუსებიც ტოლია. ამიტომ (2) ფორმულის გამოყენებისას ფართობების შეფარდება გვერდების ნამრავლების შეფარდების ტოლია; რადგან სამკუთხედებს თითო გვერდიც ტოლი აქვთ, ამიტომ ფართობების შეფარდება სხვა ორი გვერდის სიგრძეების შეფარდებაა. ეს ფაქტი ხშირად გამოიყენება უფრო რთული ამოცანების ამოხსნისას.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

(4) ვთქვათ, პარალელოგრამში მახვილი კუთხე $\angle A=\alpha$. A წვეროდან „გამოსული" გვერდებია a და b, მაშინ $S=ab\sin\alpha$, რადგან პარალელოგრამის ფართობი ასე გამოითვლება: $S=bh$, სადაც h არის b გვერდისადმი გავლებული სიმაღლე და $h=a\sin\alpha$.

$180^0-\alpha$ არის ამ პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხე. რადგან $\sin\alpha=\sin(180^0-\alpha)$, მივიღებთ: პარალელოგრამის ფართობი $S=ab\sin(180^0-\alpha)$.

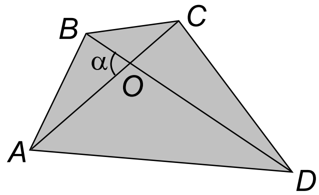
მართკუთხედში ყველა კუთხე მართია, $\alpha=90^0$, $S=ab\sin90^0=ab$.

თუ პარალელოგრამის გვერდები არ იცვლება, α კუთხე კი იცვლება, მაშინ პარალელოგრამის ფართობი უდიდესია, როცა $\alpha=90^0$.

ამრიგად, ფართობი იცვლება $(0; ab]$ შუალედში, ის უდიდესია და ab-ს ტოლია, როცა პარალელოგრამი მართკუთხედია.

(5) ამ ამოცანაში სამკუთხედის ფართობი გამოსახულია ერთი გვერდითა და კუთხეებით; რადგან $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ (γ არის a და b გვერდებს შორის კუთხე), სინუსების თეორემის თანახმად, $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ (α და β, შესაბამისად, a და b გვერდების მოპირდაპირე კუთხეებია), ამიტომ $b=\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\beta$, მაშასადამე, $S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.

(6) დიაგონალების გადაკვეთისას მიღებული ოთხივე კუთხის სინუსები ტოლია და მათგან ერთ-ერთის — α კუთხის სინუსის ტოლია. ამიტომ



$$S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\alpha;$$

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\alpha;$$

$$S_{DOC}=\frac{1}{2}OC\cdot OD\sin\alpha;$$

$$S_{AOD}=\frac{1}{2}AO\cdot OD\sin\alpha.$$

ამ ტოლობების შეკრებით, მივიღებთ: $S=\frac{1}{2}AO(OB+OD)\sin\alpha+\frac{1}{2}OC(OB+OD)\sin\alpha=$

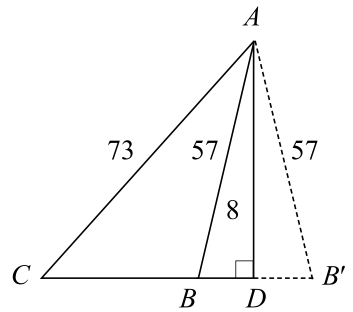
$=\frac{1}{2}AO\cdot BD\sin\alpha+\frac{1}{2}OC\cdot BD\sin\alpha=\frac{1}{2}BD(AO+OC)\sin\alpha=\frac{1}{2}BD\cdot AC\cdot\sin\alpha.$

ვთხოვოთ მოსწავლეებს, სიტყვიერად ჩამოაყალიბონ მიღებული შედეგი.

(7) მოსწავლეები იყენებენ წინა ამოცანაში მიღებულ ფორმულას: მართკუთხედის შემთხვევაში, დიაგონალები ტოლი სიგრძისაა; თუ ეს სიგრძეა d, მაშინ $S=d^2\sin\alpha$, α დიაგონალებს შორის კუთხის სიდიდეა. თუ d არ იცვლება, მაშინ ეს სიდიდე უდიდესია, როცა $\alpha=90^0$ — კვადრატის შემთხვევაში.

(8) აქ სამი გვერდით სიმაღლის პოვნის ერთ-ერთი ხერხია წარმოდგენილი: სამი გვერდით ვპოულობთ S ფართობს, შემდეგ ვწერთ ფართობის ფორმულას — $S=\frac{1}{2}ah$, a ერთ-ერთი გვერდია, h — ამ გვერდისამდი გავლებული სიმაღლე.

(9) ვთქვათ, AD სიმაღლეა; $AD=8$.



მესამე წვეროს მდებარეობის ორი შემთხვევა გვექნება — B და B', შესაბამისად, მოცემულ პირობებში შესაძლებელია ორნაირი სამკუთხედის არსებობა: ABC და $AB'C$.

$BD^2=57^2-8^2=49\cdot65,\ B'D=BD=7\sqrt{65}$.

მაშასადამე, გვაქვს ორი შემთხვევა — 73 სმ-ის სიგრძის გვერდის მოპირდაპირე კუთხე ბლაგვია, ან მახვილია; პირველ შემთხვევაში სიმაღლე გადის სამკუთხედის გარეთ, მეორე შემთხვევაში — შიგნით. შეიძლება მოსწავლეებს შევახსენოთ კლასში ამოხსნილი ამოცანა, როცა ორი გვერდითა და ერთ-ერთის მოპირდაპირე კუთხის სინუსის მიხედვით ვპოულობდით მესამე გვერდს. კუთხის სინუსი შეიძლება ტოლი იყოს ორი კუთხისთვის — α კუთხისთვის და $(180^0-\alpha)$ კუთხისთვის.

ამ ამოცანაში მესამე BC გვერდისთვის, ისევე, როგორც ზემოთ ნახსენებ შემთხვევაში, მივიღებთ ორ მნიშვნელობას; შესაბამისად, გვექნება ორი ამონახსნი — ფართობი შეიძლება იყოს $\frac{(9\sqrt{65}-7\sqrt{65})\cdot8}{2}$ სმ$^2=8\sqrt{65}$ სმ^2, ან $\frac{(9\sqrt{65}+7\sqrt{65})\cdot8}{2}$ სმ$^2=64\sqrt{65}$ სმ^2.

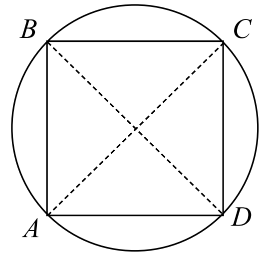
(10) თუ ტრაპეციის ფუძეებია a და b, სიმაღლე — $2h$, მაშინ ფართობი არის: $S=(a+b)h$.

სახელმძღვანელოში გამოსახულ სურათზე გაუფერადებელი სამკუთხედების ფართობების ჯამი არის:

$$S_1+S_2=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(a+b)h=\frac{1}{2}S_{\text{ტრაპეციის}}.$$

ე. ი., გაფერადებული ნაწილის ფართობიც ტრაპეციის ფართობის ნახევრის ტოლია.

(11) მოსწავლეებმა ძელის ფუძის — წრეწირში ჩახაზული $ABCD$ ოთხკუთხედის ფართობის გამოსათვლელად უნდა ისარგებლონ ფორმულით: $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha$; ფართობი უდიდესია, როცა $AC=BD=2R$ და $\alpha=90^0$; ანუ როცა $ABCD$ კვადრატია; $AC=BD=50$; კვადრატის გვერდია $25\sqrt{2}$ სმ.



(12) ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულით ვიპოვით გვერდებს; ფართობს — ჰერონის ფორმულით, ან სხვა ხერხით (სიმაღლის პოვნით, მხოლოდ პითაგორას თეორემის გამოყენებით).

(13) $S=\frac{1}{2}\cdot12\cdot15\sin\alpha$; $\quad 45\sqrt{3}=6\cdot15\sin\alpha$;

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ ან $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$;

შესაბამისად, მესამე გვერდი შეიძლება იყოს $\sqrt{189}$ ან $\sqrt{549}$ (სმ).

(14) $\angle AOB=\frac{360^0}{8}=45^0$.

$S=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\sin45^0=\sqrt{2}$ (სმ^2).

15 უმცირესი სიმაღლე უდიდეს გვერდზეა დაშვებული. სამი გვერდით, ჰერონის ფორმულის გამოყენებით, ვიპოვით ფართობს ($16\sqrt{6}$ სმ²); შემდეგ უმცირეს h სიმაღლეს ტოლობიდან: $16\sqrt{6}=\frac{1}{2}\cdot h\cdot 14$.

6 ABC სამკუთხედის h სიმაღლე შეიძლება ასე ვიპოვოთ: $h=BKsin\alpha$; მაშასადამე, $S=\frac{1}{2}AC\cdot BKsin\alpha$.

7 - 10 ამოცანების ამოსახსნელად მოსწავლეები იყენებენ კლასში დამტკიცებულ დებულებებს, შესაბამის ფორმულებს (პარალელოგრამის ფართობის გამოსახვა გვერდებითა და მათ შორის კუთხის სინუსით, თეორემა პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამისა და გვერდების კვადრატების ჯამის ტოლობის შესახებ).

11 მიღებული სამკუთხედის გვერდებია 18 სმ, 16 სმ და 14 სმ. ფართობს ვიპოვით ჰერონის ფორმულით.

12 ვიყენებთ ფორმულას: $S=\frac{1}{2}d_1d_2sin\alpha$ (d_1 და d_2 დიაგონალებია, α — დიაგონალებს შორის კუთხე). მაშასადამე,

$\frac{1}{2}d_1d_2sin\alpha=2,\ d_1d_2sin\alpha=4$;

ვთქვათ, $d_1=d$ უდიდესი დიაგონალია, მაშინ $d_2\le d$; ამასთანავე, $sin\alpha\le 1$, მაშასადამე, $dd_2\ge 4$. $d^2\ge 4,\ d\ge 2$. თუ $d=2,\ d_1=d,\ sin\alpha=1,\ d_2=2$, მაშინ გვაქვს კვადრატი 2-ის ტოლი ფართობით. ყველა სხვა შემთხვევაში, $d>2$.

პასუხი: $d\ge 2$.

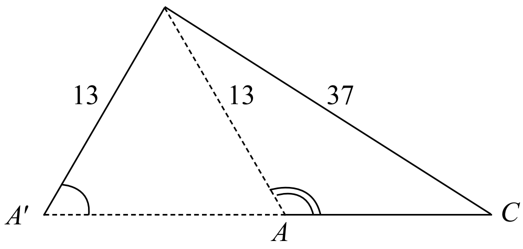
13 ანალოგიური ამოცანა კლასში იყო ამოხსნილი; $S=\frac{1}{2}d_1d_2sin\alpha$, უდიდესია, როცა $d_1=d_2=2R,\ \alpha=90^0$. ამ შემთხვევაში, $S=2R^2$.

16 ვიყენებთ ფორმულას: $2R=\frac{AB}{sin\angle C}=\frac{8}{sin150^0}=16$. $S=64\pi$.

17 $sinB=\frac{4}{5}$; $AC:\frac{4}{5}=12:\frac{1}{2}$; $AC=\frac{4}{5}\cdot 12\cdot 2=\frac{96}{5}$.

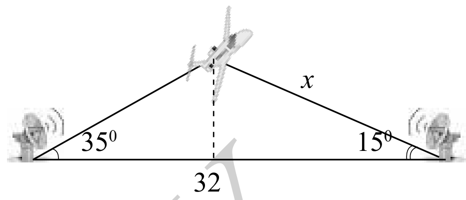
მოსწავლემ უნდა იპოვოს იმ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდი მოცემულია, ტოლია $\frac{96}{5}$ სმ-ის. შეიძლება წინასწარ, სხვადასხვა ხერხით, ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის მიღება: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a სამკუთხედის გვერდია).

18 მოსწავლემ უნდა გაითვალისწინოს, რომ C კუთხე არ არის ბლაგვი კუთხე, რადგან უდიდესი გვერდის მოპირდაპირე კუთხე არ არის; ამიტომ $cosC=\sqrt{1-sin^2C}=\frac{35}{37}$. მაგრამ მაინც გვაქვს ორი შემთხვევა. ანალოგიური ამოცანა კლასში იყო ამოხსნილი; შეიძლება გვქონდეს: $\angle A<90^0$, მაშინ AC=40 სმ; $\angle A>90^0$, მაშინ AC=30 სმ; AC-ს პოვნა შეიძლება კოსინუსების თეორემის გამოყენებით: $13^2=37^2+AC^2-2\cdot 37\cdot AC\cdot\frac{35}{37}$.



კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა ტრიგონომეტრიის პრაქტიკული გამოყენებების შემაჯამებელი ამოცანების წარდგენითა და დაწვრილებითი გარჩევით უნდა მიმდინარეობდეს.

დავალებების ამოხსნა არ უნდა გაუჭირდეთ მოსწავლეებს; პრეზენტაციისას ყურადღება გამახვილდება თეორემებზე, რომელთა გამოყენებითაც იხსნება თითოეული პრაქტიკული ამოცანა. სასურველია, რომ მოსწავლემ მოამზადოს პლაკატი, რომელზეც გამოსახული იქნება სარადარო სადგურები და მათ ზემოთ მოძრავი თვითმფრინავი.



მესამე კუთხის ზომა 130^0-ია. მისი ცოდნა გაგვიიოლებს სინუსების თეორემის გამოყენებას. ამოხსნის პროცესი მოსწავლემ შეიძლება ასე ჩაწეროს:

$$\frac{sin130^0}{32}=\frac{sin35^0}{x}$$

$$xsin130^0=32sin35^0$$

$$x=\frac{32sin35^0}{sim130^0}=\frac{32sin35^0}{sim50^0}\approx 23{,}96 \text{ (კმ).}$$

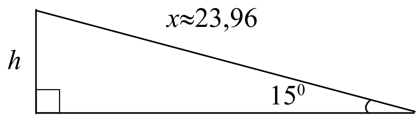
ვიპოვეთ მანძილი ერთ-ერთი სარადარო სადგურიდან. ახლა, h სიმაღლის საპოვნელად შეგვიძლია მართკუთხა სამკუთხედი განვიხილოთ.

$$sin15^0=\frac{h}{x},$$

$$h=xsin15^0,$$

$$h\approx 23{,}96\cdot sin15^0,$$

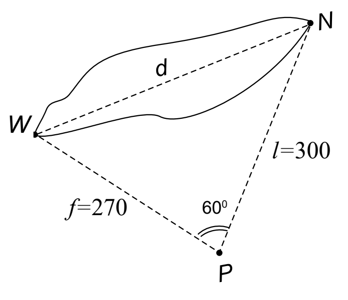
$$h\approx 6{,}2 \text{ კმ.}$$



მოსწავლემ უნდა ჩამოაყალიბოს თეორემები, რომლებიც ამოცანის ამოხსნისას გამოიყენა.

მეორე ამოცანის ამოხსნის შემთხვევაში, შეიძლება შესაბამისი სურათის მომზადება:

ამ ამოცანაში მოსწავლე კოსინუსების თეორემას გამოიყენებს.



პრეზენტაციისას მოსწავლე იყენებს სახელმძღვანელოში წარმოდგენილ პრაქტიკულ ამოცანებს და, მათი განხილვის საშუალებით, უფრო საინტერესოდ წარმოაჩენს ტრიგონომეტრიის მნიშვნელობას. ისტორიული ცნობები ტრიგონომეტრიის წარმოშობის, განვითარებისა და გამოყენებების შესახებ მოსწავლემ შეიძლება მოიძიოს ინტერნეტის, ან სასკოლო სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი შესაბამისი მასალის საშუალებით.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

საკითხები: სინუსებისა და კოსინუსების თეორემები; ტრიგონომეტრიისა და ვექტორების გამოყენებები.

მკვიდრი წარმოდგენები: გეომეტრიული თანაფარდობების აღმოჩენასა და დამტკიცებაში გვეხმარება ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

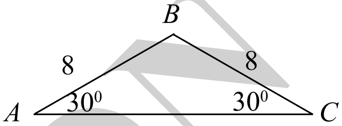
შეფასების ინდიკატორები. მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეების მათემატიკური ობიექტებით გამოსახვა; სიდიდეებს შორის ფუნქციური კავშირის დამყარება, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გამოყენება ცვლილებათა გასაანალიზებლად და რეალური მოვლენების მოდელირებისთვის.

თვითშეფასების ამოცანების ამოსახსნელად მოსწავლეებს მიეცით ვადა 2-3 დღე მაინც და წინასწარვე გააფრთხილეთ , რომ მათ მიერ ამოცანების ამოხსნისა და თვითშეფასების შემდეგ, თქვენ მათ მიაწვდით თქვენ მიერ შედგენილ შეფასების რუბრიკასაც და კლასში ერთობლივად განიხილავთ წერის შედეგებს.

მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად:

1 ვიყენებთ სინუსების თეორემას: $2R=\dfrac{a}{sin\alpha}$, $a=\dfrac{R}{3}$, $2R=\dfrac{R}{3sin\alpha}$, $sin\alpha=\dfrac{1}{6}$.

2

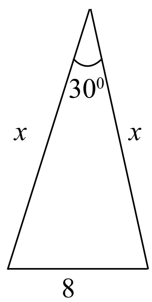


$\angle B=120^0$;

$AC^2=8^2+8^2+2\cdot8\cdot8\cdot\dfrac{1}{2}=3\cdot8^2$;

$AC=8\sqrt{3}$.

$P=8+8+8\sqrt{3}=8(2+\sqrt{3})$ (სმ).



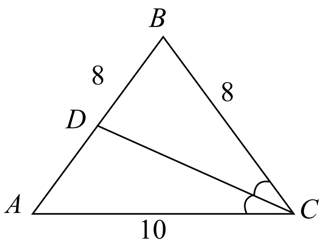
თუ 30^0-იანი კუთხე არის წვეროსთან, მაშინ $64=2x^2-2x^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, საიდანაც $x^2=64(2+\sqrt{3})$, $x=8\sqrt{2+\sqrt{3}}=8\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$.

$P=8+8+8\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=8(1+\sqrt{6}+\sqrt{2})$ სმ.

3 უდიდესი კუთხე უდიდესი გვერდის მოპირდაპირეა; ვპოულობთ ამ კუთხის კოსინუსს:

$$cos\alpha=\frac{12^2+14^2-16^2}{2\cdot12\cdot14}=\frac{1}{4}.$$

4 მოსწავლემ სამი გვერდის საშუალებით ბისექტრისა შეიძლება სხვადასხვა ხერხით იპოვოს.

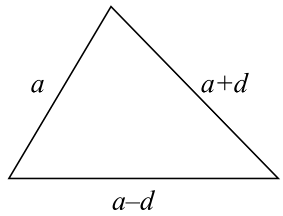


ბისექტრისის თვისების გამოყენებით ვიპოვით AD და BD მონაკვეთებს; შემდეგ დავწერთ ბისექტრისის ფორმულას:

$CD^2=AC\cdot BC-AD\cdot BD.$

შეიძლება კოსინუსების თეორემის გამოყენებით, რომელიმე მართკუთხა სამკუთხედიდან ვიპოვოთ $cosA$, შემდეგ — კოსინუსების თეორემით, CD.

5 უნდა გავითვალისწინოთ, რომ $a+d<2a-d$, $d<\frac{a}{2}$ და უნდა შევადაროთ



$a^2+(a-d)^2$ და $(a+d)^2$,

$2a^2-2ad+d^2$ და $a^2+2ad+d^2$:

ა) $a^2+2ad+d^2<2a^2-2ad+d^2$

$4ad<a^2$

$4d<a$.

ბ) თუ $d=\frac{1}{4}a$, მართკუთხაა; გ) თუ $\frac{a}{4}<d<\frac{a}{2}$, ბლაგვკუთხა. თუ $0\leq d<\frac{1}{4}a$, მახვილკუთხაა.

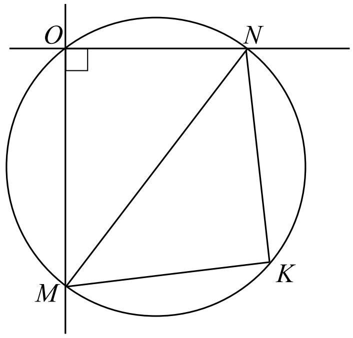
6 ვიპოვოთ ABC მართკუთხა სამკუთხედის გვერდები და გამოვიყენოთ პითაგორას თეორემა:

$AB=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$; $BC=\sqrt{4+(y-3)^2}$; $AC=\sqrt{1+(y-1)^2}$;

$1+(y-1)^2=5+4+(y-3)^2$, საიდანაც $y=4$.

7 სამი გვერდით შეიძლება ვიპოვოთ ფართობი, შემდეგ — სიმაღლეები; თუმცა, შეიძლება სხვა ხერხების გამოყენებაც: პითაგორას თეორემა; კოსინუსების თეორემა.

8 ეს წრეწირი არის MNO სამკუთხედზეც შემოხაზული, სადაც O სათავეა — $O(0;\ 0)$. MNO სამკუთხედის გვერდებია 6, 8 და 10, ის მართკუთხაა, MN — ჰიპოტენუზაა, ანუ შემოხაზული წრეწირის დიამეტრია, ცენტრის კოორდინატებია 3 და 4. წრეწირის განტოლებაა:



$(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

პირობის თანახმად, $(a-3)^2+(a-4)^2=25$.

აქედან ვიპოვით a-ს.

თვითშეფასების ამოცანების შეფასების რუბრიკა.

1 ამოცანაში, თუ გამოამჟღავნებთ ვექტორის სათავის, ბოლოს, მოდულისა და მიმართულების ცნებების ცოდნას, დაიმსახურებთ 1 ქულას;

ა) დავალების შესრულებით — კიდევ 0,5 ქულას;

ბ) დავალების შესრულებით — კიდევ 0,5 ქულას.

ამ ამოცანის მცირე ხარვეზებით შესრულებისას შესაძლებელია 1 ქულის მიღებაც. ამოცანა 2-ქულიანია.

2 ამოცანაში სამკუთხედში მითითებული კუთხისა და გვერდის განლაგების მიხედვით ნახაზების წარმოდგენით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას; არსებული ორი შესაძლო ვარიანტიდან თითოეულში პერიმეტრის დადგენით — კიდევ 1,5 ქულას. ამოცანა 3,5-ქულიანია.

(3) ამოცანაში უდიდესი გვერდისა და უდიდესი კუთხის განლაგების ცოდნა და კოსინუსების თეორემის ცოდნა შეფასდება 1 ქულით; მათი გამოყენებით ამოცანის ამოხსნაში დაიმსახურებთ კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 2-ქულიანია.

(4) ამოცანაში ბისეტრისის თვისების გამოყენებით ფერდის მონაკვეთების დადგენა შეფასდება 1 ქულით; მოცემულ სამკუთხედში კოსინუსების თეორემის გამოყენებით საჭირო კუთხის კოსინუსის პოვნა — კიდევ 1 ქულით; ბისექტრისის პოვნა — კიდევ 1 ქულით. ამოცანა 3-ქულიანია. ასევე უმაღლეს შეფასებას დაიმსახურებთ თუ სხვა გზით (მაგალითად, სათანადო ფორმულით) ამოხსნით ამოცანას.

(5) ამოცანაში მახვილკუთხა, მართკუთხა და ბლაგვკუთხა სამკუთხედებში, შესაბამისად, გვერდების თანაფარდობების ცოდნით დაიმსახურებთ 1 ქულას; არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა წარმოდგენით პროგრესიის რომელიმე წევრისა და სხვაობის მიხედვით — კიდევ 0,5 ქულას; ა), ბ) და გ) შემთხვევებში სათანადო უტოლობის ან განტოლების ამოხსნით — კიდევ 1,5 ქულას (თითოეულ შემთხვევაში). ამოცანა 6-ქულიანია.

(6) ამოცანის ამოხსნა რაიმე მეთოდით (პითაგორას თეორემით, ვექტორთა გამოყენებით, ...) შეფასდება 2 ქულით.

(7) რაიმე მეთოდით (მაგალითად პითაგორას თეორემის, ან ჰერონის ფორმულის გამოყენებით) თითოეული სიმაღლის პოვნა შეფასდება 1 ქულით; არითმეტიკული საშუალოს დადგენა — კიდევ 0,5 ქულით. ამოცანა 3,5-ქულიანია.

(8) რაიმე გზით ამოცანის ამოხსნა (მაგალითად, M, N და სათავეზე გამავალი წრეწირის განტოლების დადგენა სათანადო განტოლებათა სისტემის ამოხსნით, შემდეგ კი ამ წრეწირზე მდებარე K წერტილის კოორდინატების დადგენა) შეფასდება 4 ქულით.

რამდენი ქულა მიიღეთ?

23-26 ქულა — დავალება შესრულებულია ძალიან კარგად (შეფასება მაღალია);

18-22 ქულა — დავალება შესრულებულია კარგად (შეფასება საშუალოზე მაღალია);

13-17 ქულა — დავალება შესრულებულია ნაწილობრივ (შეფასება საშუალოა);

13 ქულაზე ნაკლები ქულის შემთხვევაში გჭირდებათ უფრო გულმოდგინე მუშაობა (შეფასება დაბალია).

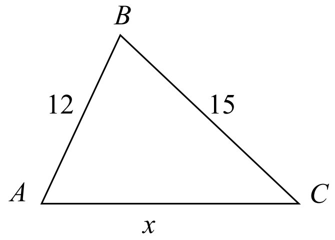
მე-2 თავის დამატებითი ამოცანები

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

(7) $144+225=369$;

$19^2<369<20^2$.

პასუხი: 20.



(13) ამ პარალელოგრამის მახვილი კუთხის სინუსია $\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, ფართობი — $6\cdot 10\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=24\sqrt{6}$.

შემაჯამებელი წერა №3

თემატური ბლოკი: ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები სამკუთხედში.

სამიზნე ცნებები: სიდიდეები, გეომეტრიული ობიექტები, ზომები, ფუნქცია, სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებები.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს გეომეტრიული ობიექტების ზომების გამოთვლა (მათ. საშ. 4); რეალურ ცხოვრებაში სხვადასხვა ყოფითი მოვლენის განხილვისას სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით; სიდიდეებსა და მათ ერთეულებს შორის თანაფარდობის გამოთვლა (მათ. საშ. 1); სინუსების და კოსინუსების თეორემების გამოყენება სამკუთხედის უცნობი ელემენტის ზომის დასადგენად.

ამოცანების ნიმუშები:

(1) სამკუთხედის ორი გვერდი 8 სმ და 10 სმ-ია, მათ შორის კუთხე 135^0-ია. იპოვეთ მესამე გვერდის სიგრძე.

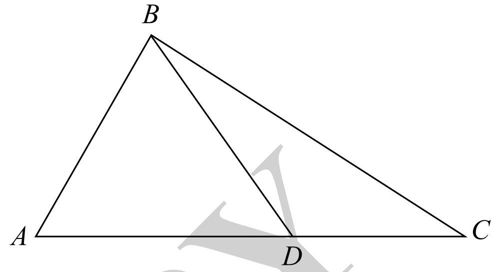
(2) ABC სამკუთხედის C კუთხის კოსინუსი 0,8-ის ტოლია, $AB=8$ სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

(3) სამკუთხედის ორი გვერდი 12 სმ და 15 სმ-ია, მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსი არის 0,4. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

(4) ABC სამკუთხედში $AB=8$ დმ, $\angle B=75^0$, $\angle C=60^0$. იპოვეთ BC გვერდის სიგრძე.

(5) სამკუთხედის გვერდები 13 დმ, 14 დმ და 15 დმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსები.

(6) ABC სამკუთხედში $\angle A=60^0$, AB=8 სმ, AC=20 სმ. AC გვერდზე D წერტილი ისეა შერჩეული, რომ $AD:DC$=3:2. იპოვეთ BD და BC მონაკვეთების სიგრძეები, C კუთხის სინუსი.



პასუხები:

(1) $2\sqrt{41+20\sqrt{2}}$ სმ. (2) $\frac{20}{3}$ სმ. (3) $18\sqrt{21}$ სმ^2. (4) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ დმ. (5) $\frac{65}{8}$ დმ და 4 დმ. (6) $4\sqrt{7}$ სმ, $4\sqrt{19}$ სმ, $\frac{\sqrt{57}}{19}$.

მითითებები:

(2) ვისარგებლოთ ფორმულით: $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$, სადაც α სამკუთხედის a გვერდის მოპირდაპირე კუთხეა, R — შემოხაზული წრეწირის რადიუსი: $\frac{8}{0,6}=2R$, საიდანაც $R=\frac{20}{3}$ (სმ).

(3) $\sin\alpha=\sqrt{1-0,16}=\sqrt{0,84}$, $S=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 15\cdot \frac{2\sqrt{21}}{10}=18\sqrt{21}$ (სმ^2).

(5) სამკუთხედის ფართობი გამოვთვალოთ ჰერონის ფორმულით, S=84 სმ^2. ვისარგებლოთ ფორმულებით:

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84}=\frac{65}{8}\text{ (დმ)},\quad r=\frac{S}{p}=\frac{84}{21}=4\text{ დმ.}$$

(6) პირობით, AD=12 სმ, DC=8 სმ.

BD და BC გვერდების სიგრძეების პოვნა შეიძლება კოსინუსების თეორემით:

$BD^2=64+144-2\cdot 8\cdot 12\cdot 0,5=112$, $BD=4\sqrt{7}$.

$BC^2=64+400-2\cdot 8\cdot 20\cdot 0,5=304$, $BC=4\sqrt{19}$.

სინუსების თეორემით, $\frac{8}{\sin C}=\frac{4\sqrt{19}}{\sin 60^0}$, საიდანაც $\sin C=\frac{\sqrt{57}}{19}$.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

გთავაზობთ, 1-2 ამოცანებიდან თითოეულის სწორი ამოხსნა შეფასდეს 1 ქულით, 3-6 ამოცანები შეფასდეს ორ-ორი ქულით.

(1) სწორი ამოხსნა შეფასდეს 1 ქულით, ხარვეზის შემთხვევაში გამოვიყენოთ 0,5-ქულიანი შეფასება.

(2) წრეწირის რადიუსის პოვნა შეფასდეს 1 ქულით. 0,5 ქულით შეფასდეს მხოლოდ C კუთხის სინუსის გამოთვლა.

(3) C კუთხის სინუსის გამოთვლა შეფასდეს 1 ქულით, კიდევ 1 ქულა დაემატოს სამკუთხედის ფართობის გამოთვლისთვის.

(4) A კუთხის პოვნა და სინუსების თეორემის გამოყენების მცდელობა შეფასდეს 1 ქულით, BC გვერდის პოვნა – კიდევ 1 ქულით.

(5) სამკუთხედის ფართობის გამოთვლა შეფასდეს 1 ქულით, შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსებიდან თითოეულის პოვნა — 0,5 ქულით.

(6) ვექტორების კოორდინატების დადგენა შეფასდეს 0,5 ქულით, ვექტორთა სკალარული ნამრავლის პოვნა კოორდინატების მიხედვით — კიდევ 0,5 ქულით, ვექტორთა მოდულების პოვნა — 0,5 ქულით, საძიებელი სიდიდის პოვნა — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

(7) AD და DC მონაკვეთების სიგრძეების გამოთვლა — 0,5 ქულა, BD და BC მონაკვეთებიდან თითოეულის გამოთვლა — 0,5 ქულა, C კუთხის სინუსის პოვნა — 0,5 ქულა. სულ — 2 ქულა.

გთავაზობთ მეორე თავის შემაჯამებელი წერის განმსაზღვრელი შეფასების შედეგების მიხედვით ჩასატარებელი სარეკომენდაციო განმავითარებელი შეფასების ერთ-ერთ ვერსიას. ცხადია, თქვენი მოსწავლეების ინდივიდუალური თვისებებისა და აკადემიური მზაობის გათვალისწინებით, კიდევ უფრო გააღრმავებთ და დააკონკრეტებთ თქვენს შეფასებას.

უპირველესად აღვნიშნავთ დამუშავებული თემის აქტუალურობას, მის მდიდარ თეორიულ და პრაქტიკულ გამოყენებით ასპექტებს, რაც აძლიერებს ამ განმავითარებელი შეფასების მნიშვნელობას. ამ ფაქტორების წარმოჩენით, თქვენ შეძლებთ მოსწავლეების აქტიურ შემოქმედებით ჩართვას განმავითარებელი შეფასების პროცესში; შეძლებთ, რომ მოსწავლეებმა უფრო უკეთ გაიაზრონ სამიზნე ცნებების არსი და გაიღრმავონ სათანადო მკვიდრი წარმოდგენები. ძირითადი აქცენტი სწორედ ამ მიმართულებით უნდა გაკეთდეს.

(1) ამოცანის პირობების მიხედვით ამოცანის გადაჭრის შესახებ საჯარო ინტერაქტიული მსჯელობა საინტერესო ინფორმაციას მოგაწვდით მოსწავლეთა აკადემიური მზაობის შესახებ, კიდევ ერთხელ წარმოაჩენს მათი ცოდნის დონეს სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის დამოკიდებულების შესახებ. კერძოდ, კოსინუსების თეორემის შესახებ.

2 ამოცანის პირობაც იძლევა საინტერესო განსჯის შესაძლებლობას და ეს ვითარება მაქსიმალურად უნდა გამოიყენოთ — ამოცანის გადაჭრის სხვადასხვა ვარიანტს შორის დასახელდება სინუსების თეორემაც, მისი ის ვარიანტიც, რომელიც წარმოგვიდგენს სამკუთხედის ელემენტებსა და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსს შორის კავშირს. იქამდე კი მოსწავლეებს მოუწევთ გაიხსენონ კავშირი *cos* და *sin* ფუნქციებს შორის დასახელებული კუთხის სინუსის საპოვნელად. აქვე გაამახვილეთ ყურადღება სათანადო ფორმულაში ფესვის წინ ნიშნის შერჩევის საკითხზე.

3 ამოცანის ამოხსნისას წინასწარ განიხილეთ სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები და მათგან შეარჩიეთ ამ ამოცანისთვის ყველაზე ხელსაყრელი. ამოცანის გადაჭრის მიზნით მოსწავლეებს კვლავ მოუწევთ მოცემული კუთხის სინუსის პოვნა კოსინუსის საშუალებით. ისაუბრეთ ფართობის ზომის ერთეულებზეც.

4 ამოცანაში მოსწავლეთა დიდ ძალისხმევას არ მოითხოვს მესამე კუთხის სიდიდის დადგენა. შემდეგ კი კვლავ აამოქმედებენ სინუსების თეორემას. ეს კიდევ უფრო გააძლიერებს სინუსების თეორემის მიმართ მოსწავლეთა აქტიურ დამოკიდებულებას, მისი მნიშვნელობის ხაზგასმას.

5 ამოცანის განხილვისას მოსწავლეები კიდევ ერთხელ დარწმუნდებიან მესამე თავის თეორიული მასალის დიდ მნიშვნელობაში, კერძოდ, სამკუთხედზე შემოხაზული და სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირების რადიუსების შესახებ. თუ კლასი ვერ გაიხსენებს მათ, მაშინ სთხოვეთ მოიძიონ სახელმძღვანელოში ეს ფორმულები და იპოვონ დასახელებული წრეწირების რადიუსები. დასვით კითხვები: რა მოსამზადებელი სამუშაოს ჩატარებაა საჭირო? როგორ ვიპოვოთ სამკუთხედის ფართობი? რამდენნაირად შეძლებთ ფართობის პოვნას? შეადარეთ: თქვენი მიდგომებიდან რომელი უფრო ხელსაყრელია?

6 ამოცანის ამოხსნისას მოსწავლეებთან ერთად გაიხსენეთ რიცხვის მოცემული პროპორციის მიხედვით დაყოფის საკითხი. შემდეგ კი მოსწავლეები, უკვე არაერთხელ გამოყენებული გზით, კოსინუსების თეორემით დაადგენენ მითითებული ორი მონაკვეთის სიგრძეს, საძიებელი კუთხის სინუსი კი კვლავ სინუსების თეორემასთან მიიყვანს მოსწავლეებს.

ამ შეფასების დასრულებისას, ისევე, როგორც ყოველი განმავითარებელი შეფასებისას, ჩაინიშნეთ თქვენ მიერ შენიშნული ხარვეზები მოსწავლეთა ცოდნაში, მოსწავლეთა აკადემიური წინსვლა და მათი მოსაზრებები სწავლა-სწავლების შესახებ. ეს ჩანაწერები კარგ სამსახურს გაგიწევთ შემდგომი მუშაობის დაგეგმვისას.

ამ შემაჯამებელი და განმავითარებელი შეფასებების შემდეგ თქვენ გაგიიოლდებათ ყოველი მოსწავლის აკადემიურ მიღწევათა დონის შეფასება სოლო ტაქსონომიის კლასიფიკაციის შესაბამისად.

1. პრესტრუქტურული დონე. აქვს ბუნდოვანი წარმოდგენა განხილულ თემასთან დაკავშირებულ სამიზნე ცნებებზე. მკაფიოდ ვერ აყალიბებს დასმულ ამოცანათა შინაარსს. არ იცნობს სათანადო თეორიულ მასალას, ძირითად შედეგებს და ამიტომ ვერ ახერხებს მათ პრაქტიკულ გამოყენებას.

2. უნისტრუქტურული დონე. იცნობს ზოგიერთ თეორიულ საკითხს. შეუძლია ჩართვა ამოცანათა განხილვისას, მაგრამ დამოუკიდებლად მათი გადაჭრა უჭირს. გამოთვლების ჩატარებისას ზოგჯერ უხეშ შეცდომას უშვებს.

3. მულტისტრუქტურული დონე. ამოცანათა განხილვისას შეუძლია ალგებრული და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების კომპლექსური გამოყენება. გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას შეუძლია სხვადასხვა მიდგომის შემოთავაზება. ზოგჯერ აქვს მცირე ხარვეზები მწყობრი, თანამიმდევრული მსჯელობის ჩატარებისას.

4. მიმართებითი დონე. წარმოადგინა ყველა დასმული ამოცანის ამოხსნის გზა. ამოხსნები მიყავს დასრულებულ სახემდე. მკაფიოდ აღწერს სამიზნე ცნებათა შინაარსს. გამოავლინა განხილულ საკითხთა კარგი ცოდნა.

5. გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. უნაკლოდ გადმოსცემს სამიზნე ცნებათა შინაარსს. შეუძლია დასმული ამოცანების ამოხსნის სხვადასხვა გზის წარმოდგენა და მათი შედარებითი ანალიზი. შეუძლია ამოცანათა განზოგადება და მათი ამოხსნის გზების აღწერა. მისი გადმოცემის სტილი დამაჯერებელი და სარწმუნოა, პასუხები დასმულ კითხვებზე — ამომწურავი.

III თავი

ვექტორი. მოქმედებები ვექტორებზე

თემები: ვექტორი

საათების სავარაუდო რაოდენობა: 18 სთ

თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ვექტორი, ვექტორის კოორდინატები, მოქმედებები ვექტორებზე.

სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	კომპლექსური დავალება
ვექტორები. არსებობს გეომეტრიული დებულებების დასაბუთების სხვადასხვა ხერხი — კოორდინატების გამოყენება, ვექტორების გამოყენება და სხვა.	ვექტორები, მოქმედებები ვექტორებზე.	რა სახის სიდიდეები აღიწერება ვექტორებით?	ვექტორების სხვადასხვა გამოყენება (გეომეტრიული დებულების დასაბუთება, მოძრაობის აღწერა).

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს გეომეტრიული დებულებების დასაბუთება ვექტორების გამოყენებით; ვექტორების საშუალებით ფიზიკური სიდიდეების წარმოდგენა და შესწავლა.

ამ თავის ძირითადი თემებია ვექტორები და ვექტორების გამოყენება. „ვექტორთა მეთოდის" გამოყენების გააზრება მნიშვნელოვანია პრაქტიკული და მათემატიკის თეორიული საკითხების შესწავლისას. ვექტორების გასამეორებლად წარმოდგენილი მასალა ისეა განაწილებული, რომ იძლევა კომპლექსური დავალების განხორციელების შესაძლებლობას, შუალედური სასწავლო მიზნის მიღწევას; გარჩეულია კომპლექსურ დავალებაში წარმოდგენილი ამოცანების ანალოგიური ამოცანები, „ვექტორთა მეთოდის" გამოყენების მაგალითები. მოსწავლეები ამ საკითხების შესწავლის პარალელურად, მუშაობენ კომპლექსური დავალების შესრულებაზე.

3.3. ვექტორი

ვაგრძელებთ შესწავლილი მასალის შესახებ ცოდნის გამეორებასა და გაღრმავებას. ამ პარაგრაფიდან ვექტორების გამეორებაა წარმოდგენილი. მასწავლებელმა უნდა შეახსენოს მოსწავლეებს, რომ კომპლექსური დავალება ვექტორების გამოყენებებს ეძღვნება. ვექტორების შესახებ ცოდნის გამეორება დაეხმარება მათ კომპლექსური დავალების შესრულებაში. ვექტორების გამოყენებების შესწავლა შეუძლებელია ვექტორების შესახებ ცოდნის დაუფლების გარეშე. შესაბამისი საკითხების განხილვა მე-9 კლასის ფიზიკისა და მათემატიკის სახელმძღვანელოებში დაიწყო; ცნობილი ფიზიკური სიდიდეები (ძალა, გადაადგილება, სიჩქარე, აჩქარება) ვექტორული სიდიდეებია — ისინი ხასიათდება რიცხვითი მნიშვნელობითა და მიმართულებით. მათემატიკური სიმკაცრით ვექტორის ცნება სკოლაში არ განიხილება, მაგრამ დაცულია ზომიერი სიმკაცრე — ვექტორი შეიძლება სიბრტყის ნებისმიერ წერტილზე მოვდოთ; თუმცა, ვამბობთ: სიბრტყის ნებისმიერ წერტილზე შეიძლება მოცემული ვექტორის ტოლი ვექტორის მოდება. მასწავლებელმა იცის, რომ ვექტორის ცნება შეიძლება შემოვიღოთ აქსიომატურადაც, თუმცა, საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსს და მის გამოყენებებს უფრო მიესადაგება ვექტორის ცნების განსაზღვრა მიმართულ მონაკვეთთა სიმრავლეში ეკვივალენტობის ცნების შემოტანის საშუალებით (სკოლაში ამ მიმართებას ტოლობას ვუწოდებთ), ვექტორი მიმართულ მონაკვეთთა ექვივალენტობის კლასია, ყოველ წერტილზე მოდებული მიმართული მონაკვეთი — შესაბამისი კლასის წარმომადგენელი.

ამოცანების გამოყენებით, მიმდინარეობს ვექტორული ალგებრის საწყისი ცნებების შესახებ ცოდნის განმტკიცება.

მნიშვნელოვანი მომენტია პარალელოგრამის შესახებ აუცილებელი და საკმარისი პირობის ჩამოყალიბება: $ABCD$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (ან, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$).

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

„ტესტები“ ისეა შერჩეული, რომ მოსწავლეს ცოდნის შემოწმების კარგი საშუალება ეძლევა. მაგალითად, მოსწავლემ უნდა შეძლოს $\overrightarrow{AB}$ ვექტორისთვის სათავისა და ბოლოს მითითება, ნულოვანი ვექტორის განსაზღვრა, სკალარული და ვექტორული სიდიდეების გარჩევა (ტემპერატურა, სიჩქარე) — ამოცანები 1-4.

მნიშვნელოვანი ამოცანებია საკოორდინატო სიბრტყეზე ვექტორების გამოსახვისა და, ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის გამოყენებით, ვექტორის სიგრძის პოვნა (ამოცანა 8); ვექტორების ტოლობის შემოწმება (ამოცანა 12, 9).

9 ამ ამოცანაში ტოლი ვექტორებია: $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BA}$ და $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CB}$ და $\overrightarrow{DA}$. ეს რვა ვექტორი მოდულით ტოლი ვექტორებია. ამასთანვე, მოდულით ტოლი ვექტორებია $\overrightarrow{DB}$ და $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{CA}$ ვექტორები.

10 ა) $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$.

ბ) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BM}$.

გ) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{CM}$ — მოდულით ტოლი ვექტორებია.

$\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{DM}$ — მოდულით ტოლი ვექტორებია.

დ) $\overrightarrow{AM}$ და $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BM}$ და $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MA}$ და $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MB}$ და $\overrightarrow{DM}$ თანამიმართული ვექტორებია.

მოსწავლემ უნდა შეძლოს, მიუთითოს პარალელოგრამის ის თვისება, რომელიც გამოიყენა: პარალელოგრამის დიაგონალები იკვეთება და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

(11) წერტილთა ყოველი წყვილი ორ ვექტორს გვაძლევს. 4 წერტილიდან შეიძლება შეირჩეს წერტილთა 6 წყვილი $\left(\frac{4\cdot3}{2}=6\right)$, სულ — 12 ვექტორი.

საშინაო დავალების ამოცანები კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია და ამიტომ მათი ამოხსნა არ უნდა გაუჭირდეს მოსწავლეს; „ტესტებზე“ პასუხების დადგენა — შერჩევა იმავე ცოდნას ეყრდნობა (სკალარული და ვექტორული სიდიდეების გარჩევა, ვექტორული სიდიდის განსაზღვრება), რაც კლასში ამოხსნილი „ტესტების“ ამოხსნისას გამოიყენა მოსწავლემ.

△7 ამოცანა (7) ამოცანის ანალოგიურია, სიჩქარის სხვადასხვა ერთეულებს შორის კავშირის გამოყენებას ეხება:

1 კმ/სთ $=\frac{1000}{3600}$ მ/წმ $=\frac{5}{18}$ მ/წმ;

72 კმ/სთ $=72\cdot\frac{5}{18}$ მ/წმ $=20$ მ/წმ.

შეიძლება გამოვიყენოთ პროპორცია:

20 მ/წმ — 8 სმ

18 მ/წმ — x სმ

$x=\frac{18\cdot8}{20}=\frac{9\cdot8}{10}=7{,}2$ (სმ).

△8, △9 და △10 ამოცანების ანალოგიური ამოცანები კლასში განიხილებოდა.

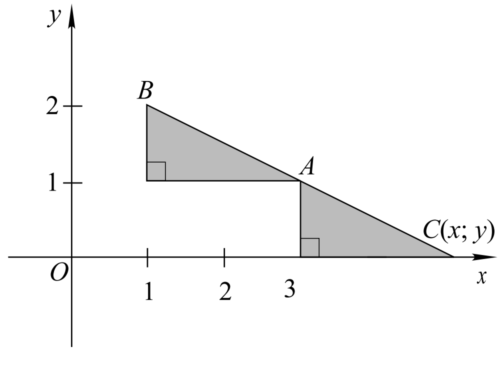
△11 წერტილთა ყოველი წყვილი ორ ვექტორს განსაზღვრავს. 5 წერტილიდან შედგება 10 წყვილი $\left(\frac{5\cdot4}{2}=10\right)$. სულ — 20 ვექტორი.

△8 და △12 ამოცანები საკოორდინატო სიბრტყეზე ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულით ამოიხსნება.

△13 სურათზე მითითებული მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობიდან გვაქვს:

$$\begin{cases} x-3=3-1 \\ 1-y=2-1 \end{cases}$$

აქედან $x=5$, $y=0$, მაშასადამე C წერტილი OX ღერძს ეკუთვნის. აღნიშნული ტოლობები ვექტორების კოორდინატების ტოლობებია — ეს საკითხი შემდეგ პარაგრაფში შეისწავლება.



2.2. ვექტორის კოორდინატები

მათემატიკის ახალ სტანდარტში ერთ-ერთ სამიზნე ცნებად დასახელებულია **სიდიდე**. მოითხოვება სიდიდეების წარმოდგენა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლებით; ვიმეორებთ ისეთი სიდიდეების შესახებ ცოდნას, რომლებიც არა მარტო რიცხვითი მახასიათებლებით აღიწერება, არამედ მიმართულებითაც ხასიათდება. ასეთი სიდიდეები მრავალი პრაქტიკული ამოცანის შესწავლისას გამოიყენება (მაგალითად, მოძრაობის აღწერა და დახასიათება) და შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შედგენის საფუძველია.

აღნიშნული სამიზნე ცნების დამუშავებას, გააზრებასა და გამოყენებას ხელს უწყობს შესაბამისი მასალის წარმოდგენის თანამიმდევრობა — ნაბიჯ-ნაბიჯ, ყოველმხრივი დამუშავების ფონზე, ვექტორული სიდიდეების წარმოდგენის შესწავლა. ამჯერად, კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებაზე ვაკეთებთ აქცენტს. შესაბამის მასალაზე გადასვლას წინ უნდა უძღოდეს (ვექტორებთან დაკავშირებული საკითხების გარდა) წინარე ცოდნის გააქტიურება — კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე, წერტილის კოორდინატები, ორ წერტილს შორის მანძილი საკოორდინატო სიბრტყეზე. კოორდინატთა მეთოდის გამოყენების ერთ-ერთი ხერხი, ვექტორის დაკავშირება ნამდვილ რიცხვთა წყვილებთან, კოორდინატების წარმოდგენა მიმართული მონაკვეთის ბოლო და საწყისი წერტილის კოორდინატების სხვაობებით. რამდენიმე შემთხვევის განხილვით შემოვიფარგლებით, როცა ვიხილავთ დებულებას: ვექტორების კოორდინატები ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ვექტორები ტოლია. აქ ცალკეა განხილული და რამდენიმე შემთხვევის გამოყენებითაა აღწერილი საკმარისი პირობა — თუ ვექტორები ტოლია, მაშინ კოორდინატები ტოლია და აუცილებელი პირობა – თუ ვექტორების კოორდინატები ტოლია, მაშინ ვექტორები ტოლია.

საკონტროლო კითხვების გამოყენებით, ვაფასებთ თეორიული მასალის გააზრებას — მოსწავლეები იმეორებენ ვექტორის კოორდინატების განსაზღვრებას, ნულოვანი ვექტორის კოორდინატებსა და ერთეულოვან ვექტორს.

ამოცანების საშუალებით მიმდინარეობს ცოდნის განმტკიცების პროცესი. თეორიული მასალის ცოდნა ეხმარება მოსწავლეებს სწორი პასუხების შერჩევაში; 1 ტესტის მიხედვით, მოსწავლეები გამოყოფენ შემთხვევას — თუ ვექტორი მოდებულია სათავეზე, მაშინ მისი კოორდინატები ბოლო წერტილის კოორდინატებს ემთხვევა; სხვა შემთხვევებში (2-7) კოორდინატები მიმართული მონაკვეთის ბოლო და საწყისი წერტილების შესაბამისი კოორდინატების სხვაობებით განისაზღვრება.

8 ტესტით ვექტორის სიგრძის ფორმულას ვიხსენებთ.

9 და 10 ამოცანებშიც ვექტორის კოორდინატების განსაზღვრების, ვექტორის მოდულის ფორმულები გამოიყენება.

11 თუ $D=(x;\ y)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ტოლობიდან გვაქვს:

$$\begin{cases} 1-2=x-4 \\ 3+7=y+1 \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \begin{matrix} x=3 \\ y=9. \end{matrix}$$

13 მოსწავლეები გაიხსენებენ, რომ $ABCD$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; თუ $D=(x;\ y)$, მაშინ გვექნება:

$$\begin{cases} 2-8=11-x \\ 9+1=32-y \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \begin{matrix} x=17 \\ y=22. \end{matrix}$$

(14) ამოცანა წინა ამოცანების ანალოგიურია; შეიძლება კლასში დამოუკიდებელი მუშაობა ჩავატაროთ, მოსწავლეებს შევთავაზოთ, დამოუკიდებლად, (12) და (14) ამოცანების ამოხსნა.

(15)-(17) ამოცანების განხილვა კლასში დაფასთან გამოძახებული ერთ-ერთი მოსწავლის, აგრეთვე, მთელი კლასის ჩართულობით მიმდინარეობს.

(15) რადგან C წერტილი $y=x$ წრფეზე ძევს, ამიტომ მისი კოორდინატებია — $C(x;\ x)$, მაშინ $\overrightarrow{AC}=(x-6;\ x-1)$. $|AC|=5$, $(x-6)^2+(x-1)^2=25$; აქედან, $x=6$ ან $x=1$.

მაშასადამე, საძიებელი წერტილებია: $(1;\ 1)$ და $(6;\ 6)$.

(16) $|\overrightarrow{OM}|=13$; $\overrightarrow{OM}=\left(x;\ \dfrac{60}{x}\right)$.

$x^2+\dfrac{3600}{x^2}=169$, აქედან $x=12$, $x=-12$, $x=5$ ან $x=-5$. მოსწავლეები იხსენებენ ბიკვადრატული განტოლების ამოხსნას.

(17) $A=(x;\ x^2)$; პირობის თანახმად, $(x-6)^2+(x^2-1)^2=25$.

$(x^2)^2-x^2-12x+37=25$.

აქ უნდა გაიხსენონ მაღალი ხარისხის განტოლების ამოხსნის ხერხები (IX კლასი). ერთ-ერთი ხერხი მამრავლებად დაშლის ხერხია:

$x^2(x^2-1)-12(x-1)=0$

$(x-1)(x^3+x^2-12)=0$

$x-1=0$ ან $x^3+x^2-12=0$.

აქ იწყება მსჯელობა — როგორ ამოვხსნათ მიღებული მე-3 ხარისხის განტოლება, როგორ გამოვიყენოთ მამრავლებად დაშლის ხერხი:

$x^3-8+x^2-4=0$,

$(x-2)(x^2+2x+4+x+2)=0$,

$(x-2)(x^2+3x+6)=0$,

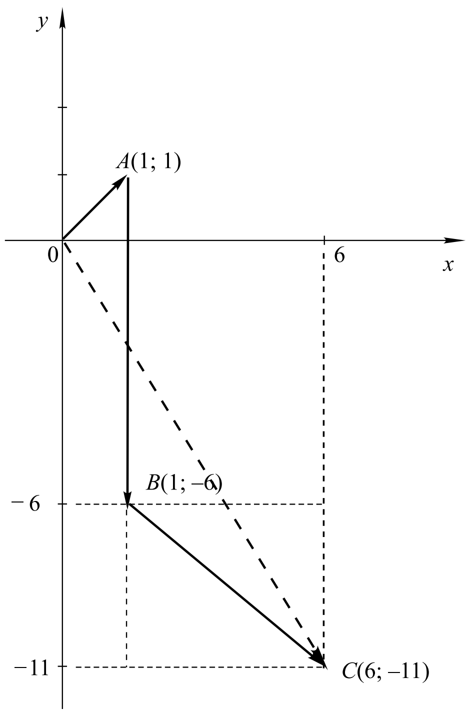
$x=2$.

პასუხი: $(1;\ 1)$, $(2;\ 4)$.

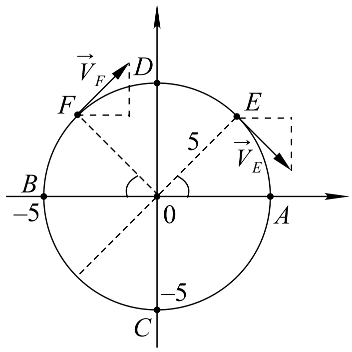
(18) მოძრაობის აღწერისას ვიყენებთ ვექტორებს, ვექტორის კოორდინატებს. ამ ამოცანის ამოხსნაც დაეხმარება მოსწავლეებს კომპლექსური დავალების შესრულებაში.

ცხადია, $\overrightarrow{OA}=(1;\ 1)$, $A=(1;\ 1)$;
$B=(1;\ -6)$; $C=(6;\ -11)$;

გვაქვს გადაადგილება $\overrightarrow{OC}$ ვექტორით,
$\overrightarrow{OC}=(6;\ -11)$.



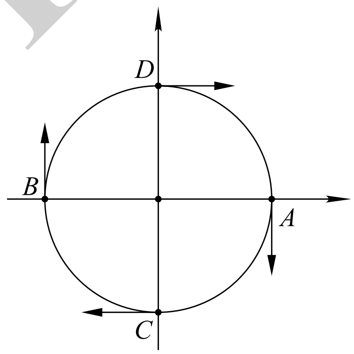
(19) ნებისმიერ M წერტილში სიჩქარის ვექტორი აღვნიშნოთ $\vec{V}$-ით.



რადგან $\angle EOA=\angle FOD=45^0$ და სიჩქარის ვექტორი რადიუსის მართობულია, ამიტომ სიჩქარის ვექტორიც ღერძებთან 45^0-იან კუთხეებს ადგენს, მისი კოორდინატების მოდულები ტოლია და თითოეული არის $2\sqrt{2}$. მივიღეთ, $\vec{V}_E=(2\sqrt{2};\ -2\sqrt{2})$, $\vec{V}_F=(2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$. ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება არჩიოს, რომ ვექტორის სათავედ კოორდინატთა სათავე შეარჩიოს. მაშინ, ადვილად ჩანს, რომ $\vec{V}_E$ ვექტორის ბოლო $(2\sqrt{2};\ -2\sqrt{2})$ წერტილია, $\vec{V}_F$ ვექტორის — $(2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$ წერტილი.

მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ საშინაო დავალების „ტესტებში“ სწორი პასუხების შერჩევა. დანარჩენი ამოცანები კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია.

17 ცხადია, $\vec{V}_A=(0;\ -4)$; $\vec{V}_B=(0;\ 4)$;
$\vec{V}_C=(-4;\ 0)$; $\vec{V}_D=(4;\ 0)$.



მასწავლებელმა შეიძლება გამოიყენოს „ს“ (სხვადასხვა) ნაწილი და ისაუბროს მოსწავლეებთან ქართული მათემატიკური სკოლის შესახებ; მისი ფუძემდებლების — ანდრია რაზმაძის, გიორგი ნიკოლაძის, ნიკო მუსხელიშვილისა და არჩილ ხარაძის მოღვაწეობის შესახებ. მათემატიკოსთა ამ სკოლის ღირსეული წარმომადგენლები არიან ქალი მათემატიკოსებიც. ერთ-ერთ მათგანზე, პროფესორ ელენე ობოლაშვილის შესახებ ცნობები შეიძლება მოსწავლეებმაც მოიძიონ. მოსწავლეებში უნდა განმტკიცდეს რწმენა, რომ მათემატიკა ერთნაირად არის მისაწვდომი მამაკაცებისა და ქალებისთვის.

3.3. ვექტორის რიცხვზე გამრავლება. ვექტორთა შეკრება

საშინაო დავალების შემოწმებისა და ვექტორების შესახებ ცოდნის გამეორების შემდეგ გადავდივართ ვექტორული სიდიდეების მნიშვნელოვანი თვისებების აღწერაზე; ვექტორული სიდიდეებით აღიწერება სიდიდეები, რომლებისთვისაც განისაზღვრება ორი ოპერაცია — ერთი „შიგა" ოპერაცია, შეკრება, მეორე გარე — რიცხვზე გამრავლება. ამ თვისებების გააზრება ვექტორული სიდიდეების შესახებ ცოდნის მნიშვნელოვანი მომენტებია; განვსაზღვრავთ ვექტორის რიცხვზე გამრავლებას — შედეგი კვლავ ვექტორია, ვექტორების შეკრებას — ჯამი ვექტორია.

ვექტორების შეკრების აღწერას ვუკავშირებთ პრაქტიკულ ამოცანას, რომელიც დაეხმარება მოსწავლეებს ამ ოპერაციის უკეთ გააზრებაში.

ვექტორების შეკრების სხვადასხვა შემთხვევების აღწერა ხელს უწყობს ამ ოპერაციის თვისებების დახასიათებას; მაგალითად, ვექტორთა ჯამის მოდული შეიძლება ტოლი არ იყოს ვექტორების მოდულების ჯამის. ვექტორებზე მოქმედებები წარმოდგენილია კოორდინატების გამოყენებითაც.

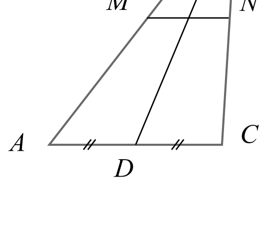
მნიშვნელოვანია, ვექტორებზე ოპერაციების რვა თვისების მითითება; პირველი ოთხი თვისება ვექტორების შეკრებას ეხება; მასწავლებელმა იცის, რომ ეს თვისებები ჯგუფის აქსიომებია: შეკრების გადანაცვლებადობა (კომუტაციურობა), შეკრების განრიგებადობა (ასოციაციურობა), შეკრების მიმართ ნეიტრალური ელემენტის (ნულოვანი ელემენტის) არსებობა, მოპირდაპირე ელემენტის (სიმეტრიული ელემენტის) არსებობა. შემდეგი ოთხი თვისება გარე ოპერაციის თვისებებია. მასწავლებელმა იცის, რომ გვაქვს სკალარზე (რიცხვითი ველის ელემენტზე) გამრავლების თვისებები.

ცხადია, საშუალო სკოლაში ეს თვისებები დაწვრილებით არ განიხილება; მოცემულია ერთ-ერთი თვისების აღწერა კოორდინატების გამოყენებით. მასწავლებელმა იცის, რომ ვექტორთა სიმრავლე, ამ შემთხვევაში, შეიძლება ნამდვილ რიცხვთა წყვილების საშუალებით წარმოვადგინოთ, ამ სიმრავლეში განვსაზღვროთ შეკრება, გარე ოპერაცია; თვისებების დამტკიცება ნიშნავს, რომ გვაქვს ვექტორული სივრცე (ორგანზომილებიანი). (1; 0) და (0; 1) ვექტორები ქმნიან მის ერთ-ერთ ბაზისს.

ეს ნაწილიც საშუალო საფეხურზე მათემატიკის სწავლების მიზნებს უკავშირდება — პროცესების მათემატიკური აღწერის გააზრება, მზადება უმაღლეს სკოლაში სწავლის გასაგრძელებლად.

ვექტორებზე ოპერაციების შესახებ ცოდნის განმტკიცებას ემსახურება საკონტროლო კითხვები, „ტესტები" და ამოცანები. ვექტორებზე ოპერაციების განსაზღვრებების ცოდნას ეფუძნება „ტესტებზე" სწორი პასუხების შერჩევა.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.



9 MN შუახაზია, $AD=DC$, ამიტომ

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q}),\quad \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q}).$$

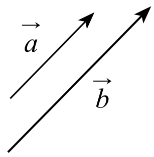
ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება არჩიოს $AMND$ პარალელოგრამის განხილვა:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\vec{p}+\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{q}=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}$.

ან $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}$.

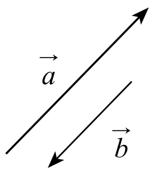
$\overrightarrow{BD}$ სხვადასხვა ხერხით შეიძლება განვიხილოთ. მაგალითად, „შევავსოთ“ სამკუთხედი პარალელოგრამამდე, მაშინ

$$2\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(-\vec{p}+\vec{q})\ \text{ან,}\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).$$



11 ა) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}$ შესაძლებელია, როცა $\vec{a}=\vec{0}$;

ბ) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ ტოლობა შესაძლებელია მაშინ, როცა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ თანამიმართული ვექტორებია.



ამ შემთხვევის კერძო შემთხვევაა $\vec{a}=\vec{0}$ ან $\vec{b}=\vec{0}$ — ნულოვანი ვექტორი ნებისმიერი ვექტორის თანამიმართულად ითვლება.

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$ შესაძლებელია, როცა $\vec{b}=\vec{0}$, ან, როცა, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ და $|\vec{a}|\geq|\vec{b}|$.

12 $$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=\vec{0}.$$

13 ა) $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{CA})=-\frac{1}{2}\vec{r}$.

14 ა) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}(-\overrightarrow{BC})=-\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$; შეიძლება ასეც ვიმსჯელოთ:

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$, ან $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})$.

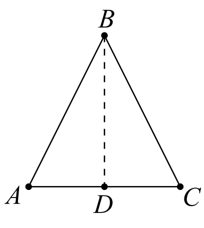
15 ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; ე. ი. $k=\frac{1}{2}$;

ბ) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{CA})$, ე. ი. $k=-\frac{1}{2}$.

გ) $(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$ ე. ი. $k=-1$.

16 $$|\vec{a}|=3|\vec{b}|,\ |\vec{c}|=3|\vec{b}|\ \text{ე. ი.}\ |\vec{a}|=|\vec{c}|.$$

17 $\left.\begin{array}{l}\vec{p}=\overrightarrow{AB}=(4;\ 1)\\ \vec{q}=\overrightarrow{CD}=(4;\ 1)\end{array}\right|\quad \vec{p}=\vec{q}$.



მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ საშინაო დავალების შესრულება; ამ აქტივობით ისინი ვექტორებზე მოქმედებებისა და ამ მოქმედებების თვისებების შესახებ ცოდნას განიმტკიცებენ. მოსწავლეებმა უნდა გამოიყენონ სამკუთხედის მედიანის თვისება:

თუ BD მედიანაა, მაშინ $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$.

14 ამოცანაში კი საჭიროა მედიანების სხვა თვისების გამოყენება: მედიანების გადაკვეთის წერტილით თითოეული მედიანა იყოფა შეფარდებით 2:1 (წვეროს მხრიდან). მაგალითად, $\overrightarrow{CO}=\frac{2}{3}\,\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})$.

15 ამოცანაში ვითვალისწინებთ, რომ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამი მართკუთხედია, მართკუთხედში კი დიაგონალების სიგრძეები ტოლია. ამიტომ $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორებიდან თითოეულის მოდული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული მართკუთხედის დიაგონალის სიგრძის ტოლია, $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$.

ცხადია, $5\vec{a}$ და $3\vec{b}$ ვექტორების ჯამის მოდულიც ამ ვექტორებზე აგებული მართკუთხედის დიაგონალის ტოლია:

$$|5\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{25\cdot 9+9\cdot 25}=15\sqrt{2}.$$

17 ბ) $\vec{p}=(3;\ -8)$, $\vec{q}=(3;\ -8)$ $\Big|$ $\vec{p}=\vec{q}$.

3.4. ვექტორის დაშლა საკოორდინატო ღერძების მიმართ. ვექტორების გამოყენება

დავალების შემოწმება წინარე ცოდნის გამეორებასაც ემსახურება; მოსწავლეები იმეორებენ გავლილ მასალას — მოქმედებები ვექტორებზე, ვექტორის კოორდინატები. ყურადღება მახვილდება ვექტორების ჯამის განსაზღვრებაზე — ვექტორების შეკრების შედეგი ვექტორია (ხშირად, მას ჯამურ ვექტორად მოვიხსენიებთ); ფიზიკაში, მაგალითად, ძალის ან გადაადგილების შემთხვევაში, ვსაუბრობთ ტოლქმედ ვექტორზე; ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი ვექტორია, რომელიც მოცემული ვექტორის თანამიმართულია, ან საწინააღმდეგოდ არის მიმართული. ვექტორის დაშლა ორი სხვადასხვა მიმართულების მიხედვით მხოლოდ კერძო შემთხვევაშია განხილული — ვექტორის დაშლა ურთიერთმართობული მიმართულებების მიხედვით; აქ შემოდის საკოორდინატო ღერძების ორტების ცნება; მასწავლებელმა იცის, რომ განვიხილავთ დაშლას ორთოგონალური ბაზისის მიმართ — $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ვექტორების მიმართ; საშუალო სკოლაში ეს საკითხები ფორმალიზმისა და მათემატიკური სიზუსტის სრული დაცვით არ შეიძლება, რომ გადაიცემოდეს. მაგრამ პრაქტიკული გამოყენებების დასახასიათებლად სრულიად საკმარისია აღნიშნული შემთხვევით შემოფარგვლა. ამავე პარაგრაფში განვიხილავთ ვექტორების იმ გამოყენებებს, რომლებსაც ეხება კომპლექსური დავალება; ვექტორების გამოყენება გეომეტრიაში, ვექტორების გამოყენება მოძრაობის აღწერისას — ამ საკითხების დაწვრილებითი განხილვა, სხვადასხვა შემთხვევის წარმოდგენა დაეხმარება მოსწავლეებს კომპლექსური დავალების შესრულებაში. მნიშვნელოვანია გეომეტრიული გამოყენების სხვადასხვა ინტერპრეტაციის წარმოდგენა; ერთი და იმავე ამოცანის სხვადასხვა ხერხით დამტკიცება ავითარებს მოსწავლეთა ანალიტიკურ აზროვნებას.

ე. წ. „ტესტური" დავალებები ხელს უწყობს კოორდინატებისა და კოორდინატებით წარმოდგენილ ვექტორებზე მოქმედებების ჩატარების გააზრებას.

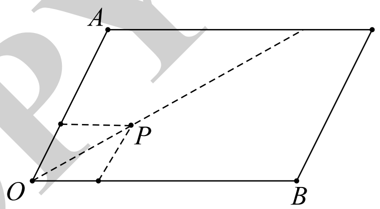
მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

(7) ა) ვთქვათ, $\vec{p}=3\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{q}=\vec{i}+2\vec{j}$, მაშინ, $\vec{a}=\frac{1}{2}(15\vec{i}-5\vec{j}+\vec{i}+2\vec{j})=8\vec{i}-1{,}5\vec{j}$.

ცხადია, ეს ვექტორი საკოორდინატო სიბრტყეზე შეიძლება გამოვსახოთ $\overrightarrow{OM}$ მიმართული ვექტორით, სადაც $M=(8;\ -1{,}5)$.

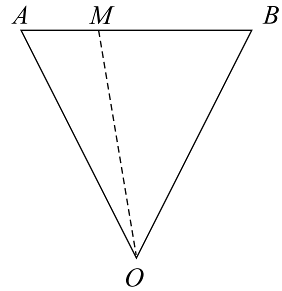
(8) ნებისმიერი $\vec{p}$ ვექტორის თანამიმართული ერთეულოვანი ვექტორი შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $\frac{1}{|\vec{p}|}\cdot\vec{p}$; მართლაც, მისი სიგრძე 1-ის ტოლია, $\left|\frac{1}{|\vec{p}|}\cdot\vec{p}\right|=\frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}|}=1$ და, რადგან $\frac{1}{|\vec{p}|}>0$, ამიტომ $\frac{1}{|\vec{p}|}\cdot\vec{p}$ თანამიმართულია $\vec{p}$ ვექტორის.

$$|\vec{p}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5};\quad \frac{\vec{p}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}.$$



(9) ცხადია, $\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}=0{,}6\vec{i}+0{,}8\vec{j}+\frac{5}{13}\vec{i}+\frac{12}{13}\vec{j}=$ $=\frac{64}{65}\vec{i}+\frac{112}{65}\vec{j}$; $\overrightarrow{OC}$ ვექტორი თანამიმართულია $\overrightarrow{OP}$ ვექტორის და მისი სიგრძე 1-ის ტოლია: $\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$;

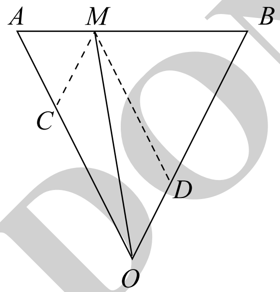
$|\overrightarrow{OP}|=\frac{16}{65}\sqrt{65}$, $\overrightarrow{OC}=\frac{4}{\sqrt{65}}\vec{i}+\frac{7}{\sqrt{65}}\vec{j}$.



(10) განვიხილოთ შემთხვევა: $\frac{AM}{MB}=\frac{k}{l}$; მაშინ გვაქვს:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{k}{k+l}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{k}{k+l}\overrightarrow{AO}+\frac{k}{k+l}\overrightarrow{OB}=$$

$$=\overrightarrow{OA}-\frac{k}{k+l}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{k+l}\overrightarrow{OB}=\frac{l}{k+l}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{k+l}\overrightarrow{OB}.$$



შეიძლება ზოგიერთმა მოსწავლემ გაავლოს M-ზე OB-ს და OA-ს პარალელური MC MD წრფეები და თალესის თეორემით დაასკვნას: $\frac{OC}{AC}=\frac{l}{k}$, $\frac{OD}{DB}=\frac{k}{l}$; ანუ $\frac{OC}{OA}=\frac{l}{k+l}$, $\frac{OD}{OB}=\frac{k}{k+l}$, საიდანაც $\overrightarrow{OM}$ $=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\frac{l}{k+l}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{k+l}\overrightarrow{OB}$.

თუ $k=1$, $l=2$; მივიღებთ: $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

შებრუნებული დებულება: ვთქვათ, $\overrightarrow{OM}=\frac{l}{k+l}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{k+l}\overrightarrow{OB}$; **(1)**
ამასთანავე, ზემოთ წარმოდგენილი მსჯელობის ანალოგიურად, გვექნება:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{|\overrightarrow{MB}|}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\overrightarrow{OB} \qquad \textbf{(2)}$$

(1) და (2)-დან, $\vec{O}=\left(\frac{l}{k+l}-\frac{|\overrightarrow{MB}|}{|\overrightarrow{AB}|}\right)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{k}{k+l}-\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|}\right)\cdot\overrightarrow{OB}$

რადგან $\overrightarrow{OA}$ და $\overrightarrow{OB}$ არ არის თანამიმართული ვექტორები, ამიტომ

$$\frac{|\overrightarrow{MB}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{l}{k+l},\quad \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{k}{k+l},\qquad \text{აქედან}\quad \frac{|\overrightarrow{MB}|}{|\overrightarrow{AM}|}=\frac{l}{k}.$$

(11) ა) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$. რადგან $ABCD$ პარალელოგრამია, გამოვიყენეთ ტოლობა: $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.

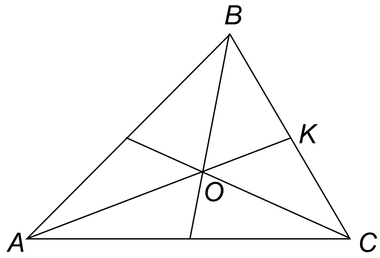
ბ) ვთქვათ, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$;

მაშინ გვაქვს: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$; საიდანაც $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$; ე. ი. $ABCD$ პარალელოგრამია.

ამრიგად, $ABCD$ პარალელოგრამია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სიბრტყის ნებისმიერი O წერტილისთვის გვაქვს:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}.$$

შეიძლება ყურადღება გავამახვილოთ ტოლობებზე: $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}$ და $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ — ვექტორის წარმოდგენაზე ორი ვექტორის ჯამის ან სხვაობის სახით, როცა ახალი, მესამე წერტილი ჩაერთვება განხილვაში.

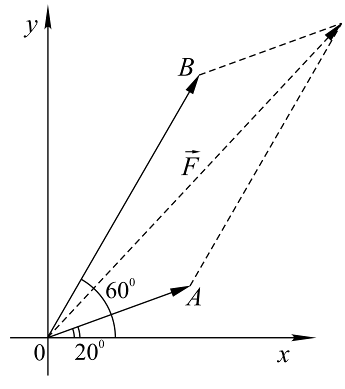


(12) ა) რადგან $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{AO}$;

მაშასადამე, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}=\vec{O}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\vec{O}$.

ბ) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})=$

$=3\overrightarrow{MO}+\vec{O}$.



(13) ვთქვათ, $\vec{F}$ ჯამური ვექტორია.

ვიპოვოთ $\overrightarrow{OA}$ და $\overrightarrow{OB}$ ვექტორების კოორდინატები.

$\overrightarrow{OA}=(x_1;\ y_1)$;

$x_1=100cos20^0,\ y_1=100sin20^0$;

$\overrightarrow{OB}=(x_2;\ y_2)$

$x_2=150cos60^0,\ y_2=150sin60^0$;

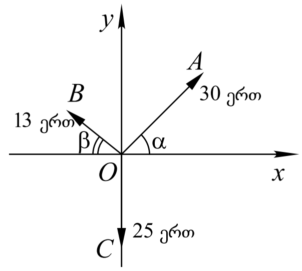
$\vec{F}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(100\cdot cos20^0+150\cdot cos60^0;$

$100sin20^0+150sin60^0)\approx(100\cdot 0{,}9397+150\cdot 0{,}5;\ 100\cdot 0{,}3420+150\cdot 0{,}8660)=(168{,}97;\ 164{,}1)$

$\vec{F}=\sqrt{168{,}97^2+164{,}1^2}\approx 235{,}54.$

ვთქვათ, $\vec{F}$ ვექტორი OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან α კუთხეს ქმნის; მაშინ გვაქვს: $cos\alpha=\dfrac{168{,}97}{235{,}54}\approx 0{,}7174;\quad \alpha\approx 44{,}2^0.$

მოსწავლეები ეჩვევიან ცხრილების გამოყენებას, კალკულატორით სარგებლობას.



(14) მოსწავლეები იხსენებენ ტრიგონომეტრიულ ფორმულებს:

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{cos^2\alpha}.$$

რადგან α მახვილი კუთხეა, $cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\frac{4}{5}$;

$sin\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$;

$cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}=\frac{5}{13}$; $sin\beta=\frac{12}{13}$.

$\overrightarrow{OA}=(30cos\alpha;\ 30sin\alpha)=(24;\ 18)$;

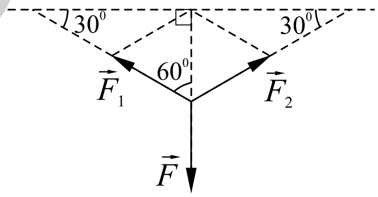
$\overrightarrow{OC}=(0;\ -25)$, $\overrightarrow{OB}=(-13cos\beta,\ 13sin\beta)=(-5;\ 12)$.

ამ ძალების ტოლქმედია:

$\vec{F}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(24-5+0;\ 18+12-25)=(19;\ 5)$.

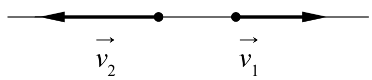
მისი მოდული კი ასე გამოითვლება: $|\vec{F}|=\sqrt{361+25}=\sqrt{386}\approx 19{,}65$ (ნიუტონი).

თუ $\vec{F}$ ძალის დახრის კუთხეს აღვნიშნავთ γ-თი, მაშინ $cos\gamma=\frac{19}{\sqrt{386}}\approx 0{,}967$, $\gamma\approx 14{,}8^0$.



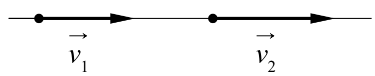
(15) დაჭიმულობის $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების ტოლქმედი $\vec{F}$ ძალის მოპირდაპირე ვექტორია $-\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$.

ამოცანის პირობის თანახმად, შექმნილ პარალელოგრამში $\vec{F}_1$-სა და $\vec{F}_2$-ს შორის კუთხე 120^0-ია, მისი ნახევარი — 60^0. ამიტომ $|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|=|\vec{F}|=50$ (ერთეული).



(16) ა) $|v_2|+|v_1|=120+80=200$ (კმ/სთ).

მაშასადამე, ავტომობილები ერთმანეთს ყოველ საათში 200 კმ-ით შორდებიან, აქ $|v_2-v_1|=|v_2|+|v_1|$.



ბ) $|v_2|-|v_1|=40$ (კმ/სთ).

ავტომობილები ყოველ საათში 40 კმ-ით შორდებიან ერთმანეთს, აქ $|\vec{v}_2-\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|-|\vec{v}_1|$.

შეიძლება წარმოვიდგინოთ, რომ მეორე ავტომობილი (v_2=120 კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი) გაჩერებულია და პირველი მოძრაობს ა) შემთხვევაში 200 კმ/სთ სიჩქარით, ბ) შემთხვევაში — 40 კმ/სთ სიჩქარით.

საშინაო დავალების „ტესტებიც" ვექტორის კოორდინატებით წარმოდგენისა და კოორდინატებით მოცემულ ვექტორებზე მოქმედებების შესახებ ცოდნის განმტკიცებას ეხება. 6 - 8 ამოცანების ანალოგიური ამოცანები კლასში იყო ამოხსნილი.

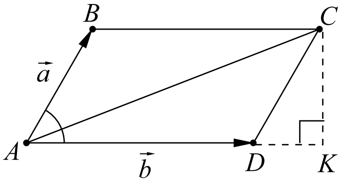
9 ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლეს შეუძლია ზოგადი ფორმულის გამოყენება, ან, ამ კერძო შემთხვევაში, მსჯელობის ჩატარება.

10 და 11 ამოცანებს მოსწავლეები, კლასში ამოხსნილი ანალოგიური ამოცანების მიხედვით ხსნიან.

ძირითადი სიმძიმე ფიზიკის გამოყენებაზე საკლასო ამოცანების განხილვაზე გადავიტანეთ. ამიტომ მოსწავლეებს არ უნდა გაუჭირდეთ 12 და 13 ამოცანების ამოხსნა.

14 ამოცანის ამოხსნა მათ კომპლექსური დავალების შესრულებაში დაეხმარება.

12



$|\vec{a}|=36$; $|\vec{b}|=50$.

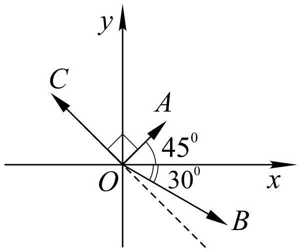
ჯამური ვექტორი არის $\overrightarrow{AC}$ ვექტორი $\angle CDK=60^0$,

ამიტომ $DK=\dfrac{36}{2}=18$, $CK=18\sqrt{3}$. მაშასადამე,

$AC^2=(50+18)^2+(18\sqrt{3})^2=68^2+3\cdot 18^2=5596$,

$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{1399}$ (ნიუტონი).

13 შეიძლება კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებაც. ჩავწეროთ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ და $\overrightarrow{OC}$ ვექტორები კოორდინატებში.



$\overrightarrow{OA}=(40cos45^0;\ 40sin45^0)=(20\sqrt{2};\ 20\sqrt{2})\approx(28,284;\ 28,284)$;

$\overrightarrow{OB}=(70cos30^0;\ -70sin30^0)=(35\sqrt{3};\ -35)\approx(60,622;\ -35)$;

$\overrightarrow{OC}=(60cos135^0;\ 60sin135^0)=(-30\sqrt{2};\ 30\sqrt{2})=(-42,426;\ 42,426)$.

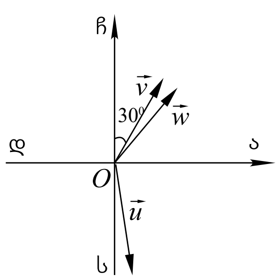
ამ სამი ძალის ტოლქმედია:

$\vec{F}=(46,48;\ 35,71)$

$|\vec{F}|=\sqrt{46,48^2+35,71^2}\approx 58,61$.

ვიპოვით „დახრის" კუთხესაც $cos\alpha$-ს საშუალებით: $cos\alpha\approx\dfrac{46,48}{58,61}\approx 0,793$; $cos\alpha\approx 37,5^0$.

14 ვთქვათ, თვითმფრინავის საკუთარი სიჩქარე $\vec{v}$ ვექტორითაა გამოსახული. მაშინ, ცხადია, $\vec{v}=(600sin30^0;\ 600cos30^0)=(300;\ 300\sqrt{3})\approx(300;\ 519,6)$, თუ OX ღერძი მიმართულია დასავლეთიდან აღმოსავლეთისკენ.



თუ $\vec{w}$ არის თვითმფრინავის სიჩქარე დედამიწის მიმართ,

მაშინ $\vec{w}=(500sin40^0;\ 500cos40^0)\approx(321,4;\ 383)$.

მაშინ ქარის $\vec{u}$ სიჩქარე ასე გამოისახება:

$\vec{u}=\vec{w}-\vec{v}\approx(21,4;\ -136,6)$

$|\vec{u}|\approx 138$ (კმ/სთ) — ეს ქარის სიჩქარეა.

თუ ქარის სიჩქარის მიმართულება სამხრეთის მიმართულებასთან არის α, მაშინ $cos(90^0-\alpha)\approx\dfrac{21,4}{138}$, საიდანაც $\alpha\approx 9^0$. მაშასადამე, ქარის მიმართულებაა: ს9^0ა.

3.5. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი. სკალარული ნამრავლის გამოსახვა კოორდინატებით

მათემატიკის სასკოლო კურსში „ვექტორული აპარატის“ ჩართვამ ხელი შეუწყო მოსწავლეების მიერ მათემატიკის მნიშვნელობისა და მათემატიკის გამოყენებების უკეთ გააზრებას. ხშირად, ვექტორების გამოყენება აადვილებს გეომეტრიული დამტკიცებების განხილვას. ჩვენ უკვე განვიხილეთ ვექტორების გამოყენებები, რომლებიც უკავშირდებოდა, მაგალითად, წრფეთა პარალელურობის დასაბუთებას, წრფეთა გადაკვეთის წერტილის მოძიებას (მაგალითად, სამკუთხედის მედიანების თვისებები, ტრაპეციისა და სამკუთხედის შუახაზის თვისებები). ვექტორების გამოყენება წრფეთა მართობულობის დასამტკიცებლად დაკავშირებულია სკალარული ნამრავლის ცნებასთან; სკალარული ნამრავლით გამოისახება ფიზიკური სიდიდეები.

სკალარულ ნამრავლზე გადასვლა მიმდინარეობს წინარე ცოდნის გააქტიურებით, რომელიც დაკავშირებულია ვექტორებზე მოქმედებებთან, ვექტორის გაშლასთან საკოორდინატო ღერძების მიმართ და გეომეტრიის თეორემებთან (მაგალითად, კოსინუსების თეორემასთან).

წინარე ცოდნის გააქტიურებას მოსდევს სკალარული ნამრავლის განსაზღვრების ჩამოყალიბება, კოსინუსების თეორემის გამოყენებით, სკალარული ნამრავლის კოორდინატებით წარმოდგენის ჩვენება და სკალარული ნამრავლის გამოყენებების მაგალითების განხილვა.

სკალარული ნამრავლის აქსიომატური განსაზღვრებით შემოტანისას სკალარული ნამრავლის თვისებები აქსიომებით მოიცემა; მასწავლებელმა უნდა მიაქციოს ყურადღება ვექტორთა წრფივი კომბინაციების გამრავლების მსგავსებას მრავალწევრების გამრავლების წესთან.

წარმოდგენილია მაგალითი, რომელშიც სკალარული ნამრავლის გამოყენებით გეომეტრიული ფაქტი მტკიცდება. შემდეგი მაგალითი ცნობილი გამოსახულების — ($a\sin\alpha+b\cos\alpha$)-ს უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების დადგენასთან არის დაკავშირებული. მე-3 მაგალითში სკალარული ნამრავლის ფიზიკაში გამოყენების ნიმუშია წარმოდგენილი.

საკონტროლო კითხვებზე და „ტესტებზე“ პასუხების გაცემით განიმტკიცება ცოდნა სკალარული ნამრავლის, მისი თვისებების შესახებ.

ტექსტის პირველ მაგალითში ვიყენებთ „სამკუთხედის წესით“ ვექტორის დაშლას: მაგალითად, $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$. ვიყენებთ სკალარული ნამრავლის თვისებას: თუ არანულოვანი ვექტორების სკალარული ნამრავლი ნულია, ვექტორები მართობულია და თუ ვექტორები მართობულია, სკალარული ნამრავლი ნულია; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BO}=0$ და $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ტოლობებიდან ვღებულობთ: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CO}=0$, CC_1 სიმაღლეა.

მასწავლებლებმა იციან, რომ $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ გამოსახულება შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, სადაც $tg\varphi=\dfrac{b}{a}$.

ტექსტში განხილულ მე-2 მაგალითში $3\sin\alpha+4\cos\alpha$-ს წარმოვადგენთ ორი — $\overrightarrow{OA}(3;\ 4)$ და $\overrightarrow{OB}(\sin\alpha;\ \cos\alpha)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლის სახით. კლასში მაღალი მზაობის მოსწავლეებს შეიძლება დავავალოთ უფრო ზოგადი გამოსახულების განხილვა ($a\sin\alpha+b\cos\alpha$).

მესამე მაგალითში ვიყენებთ სკალარული ნამრავლის ფიზიკურ შინაარსს.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

7 ა) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=a\cdot a\cdot\cos 90^0=0$;

ბ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a\cdot a\sqrt{2}\cos 45^0=a^2$;

გ) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cos 90^0=0$.

8 დ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AB}|=9$.

სკალარული ნამრავლისა და ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის გამოყენებით, ადვილად იხსნება **9**-**15** ამოცანები.

16 საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე 0^0-ია, ან — 180^0.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{\lambda x^2+\lambda y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}}=\frac{\lambda(x^2+y^2)}{|\lambda|\cdot(x^2+y^2)}=\frac{\lambda}{|\lambda|}.$$

თუ $\lambda>0$, $\cos\alpha=1$, $\alpha=0^0$.

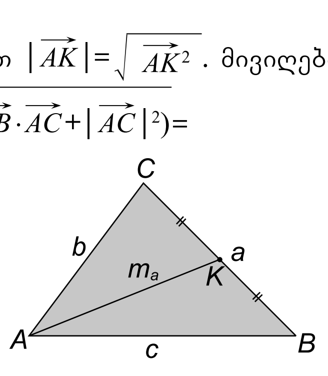
თუ $\lambda<0$, $\cos\alpha=-1$, $\alpha=180^0$.

შეიძლება ასეც ვიმსჯელოთ: პირობის თანახმად, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, $\vec{b}$ არის $\vec{a}$-ს თანამიმართული, თუ $\lambda>0$, ან საწინააღმდეგოდ მიმართული, თუ $\lambda<0$. ორივე შემთხვევაში, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$-ს ერთ წერტილში მოვდებთ, ისინი ერთ წრფეზე განლაგდება.

17 $m_a=|\overrightarrow{AK}|$; $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ გავითვალისწინოთ $|\overrightarrow{AK}|=\sqrt{\overrightarrow{AK}^2}$. მივიღებთ

$$|\overrightarrow{AK}|=\sqrt{\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})}=\sqrt{\frac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2)}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}(c^2+b^2-2cb\cdot\cos\angle CAB)}.$$



$$\cos\angle CAB=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

$$2bc\cos\angle CAB=b^2+c^2-a^2.$$

ამრიგად, $m_a=\sqrt{\frac{1}{4}(c^2+b^2+b^2+c^2-a^2)}=$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

(20) $\vec{a}(x;\ 5\sqrt{3})$; $\vec{b}(-4;\ \frac{4\sqrt{3}}{3})$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4x+20$; $\quad -4x+20=20$; $\quad x=0$.

(24) $\overrightarrow{AB}=(1;\ 3)$, $\overrightarrow{BC}=(3;\ -1)$, $\overrightarrow{CD}=(-1;\ -3)$, $\overrightarrow{DA}=(-3;\ 1)$.

ამრიგად, $AB||CD$, $\ BC||DA$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$;

ამიტომ $ABCD$ რომბია.

შეიძლება ზოგიერთმა მოსწავლემ ოთხივე გვერდის ტოლობით დაადგინოს ოთხკუთხედის სახე.

(27) $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=6$, $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$; $|3\vec{p}-2\vec{q}|=\sqrt{(3\vec{p}-2\vec{q})^2}=\sqrt{9\vec{p}^2-12\vec{p}\cdot\vec{q}+4\vec{p}^2}=\sqrt{9\cdot16+4\cdot36}=12\sqrt{2}$

.

მოსწავლეებმა ყურადღება გაამახვილონ ტოლობებზე $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$; $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}$.

(28) $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=15$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=72$.

ა) $S=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|sin\alpha$, $cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{3}{5}$, $sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $S=8\cdot15\cdot\dfrac{4}{5}=96$.

ბ) დიაგონალების სიგრძეები შეიძლება კოსინუსების თეორემით ვიპოვოთ.

(29) ეს ამოცანა **(27)** ამოცანის ანალოგიურად იხსნება; ვიყენებთ ფორმულას:

$|4\vec{a}-5\vec{b}|=\sqrt{(4\vec{a}-5\vec{b})(4\vec{a}-5\vec{b})}=\sqrt{16\vec{a}^2+25\vec{b}^2-40\vec{a}\,\vec{b}}$.

საშინაო დავალების ამოცანები, როგორც წესი, საკლასო ამოცანების ანალოგიურად იხსნება.

22 $(\vec{a}+x\vec{b})\cdot(\vec{a}-x\vec{b})=0$;

$\vec{a}^2-x^2\vec{b}^2=0$;

$x^2=\dfrac{16}{9}$, $x=\dfrac{4}{3}$ ან $x=-\dfrac{4}{3}$.

23 $\vec{a}=-\vec{b}$, მაშასადამე, ამ ვექტორებს შორის კუთხე 180^0-ია,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|cos\alpha=|\vec{a}|^2cos\alpha=25\cdot(-1)=-25$.

24 ვიყენებთ მედიანის ფორმულას: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$; ვიპოვით $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების კოორდინატებს, შემდეგ — $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ვექტორის კოორდინატებს; $\overrightarrow{AD}$-ს ვპოულობთ ორ წერტილს შორის მანძილის (ვექტორის სიგრძის) ფორმულით.

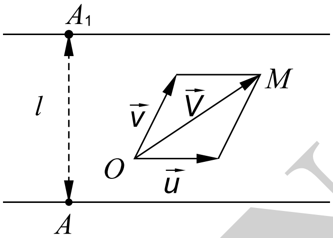
III თავის კომპლექსური დავალება.

ეს დავალება ამ თავის სამიზნე ცნებას უკავშირდება, კომპლექსური დავალება გამიზნულია დასახელებული თემის ფარგლებში განსახილველი საკითხების დასამუშავებლად და ახალი ცოდნის ასაგებად. კომპლექსური დავალების შესრულებით, მოსწავლე კარგად გაიაზრებს ისეთი სიდიდეების შესაბამისი მათემატიკური აპარატის მნიშვნელობას, რომლებიც რიცხვებითა და სათანადო მიმართულებით ხასიათდება; მნიშვნელოვანია ამ მათემატიკური აპარატის გამოყენება გეომეტრიული დებულებების დამტკიცების დროსაც. კომპლექსური დავალების პირობა ისეა დაწერილი, რომ დაეხმაროს მოსწავლეს ამოცანების ამოხსნაში; ამოცანის ამოხსნის საშუალებით, სხვადასხვა სიდიდის აღწერისას, გაიაზროს ვექტორული აპარატის გამოყენების მოხერხებულობა.

პირველი ამოცანა მოძრაობის აღწერისას ვექტორებზე მოქმედებების გამოყენებას ეხება. მოსწავლემ შეიძლება პლაკატები წარმოადგინოს და აღწეროს ამოცანის ამოხსნის მიმდინარეობა; შეიძლება ელექტრონული ვერსიის მომზადება.

ამოცანის ამოხსნის პროცესი შეიძლება სურათებით აღვწეროთ:

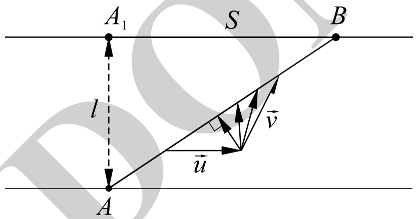
ამოცანის პირობის შესაბამისად, პირველი სურათი შეიძლება ასეთი იყოს:



$\overrightarrow{OM}$ ვექტორით გამოისახება ნავის მოძრაობა ნაპირის მიმართ.

პირველ კითხვეზე პასუხი ამ სურათით აღიწერება — ნაპირის მიმართ ნავის სიჩქარე „ჯამური" ვექტორით აღიწერება: $\vec{u}+\vec{v}$.

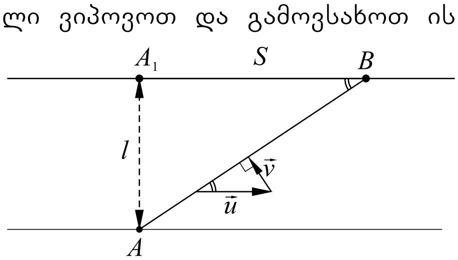
შემდეგ კითხვაზე პასუხი მეორე სურათით გაიცემა:



ნავი B წერტილში მოხვდება, თუ ჯამურ ვექტორს AB სხივის მიმართულება ექნება. ამ სურათიდან ჩანს, რომ ნავის გადაადგილების სასურველი მიმართულება სხვადასხვა სიგრძისა და სხვადასხვა მიმართულების მქონე $\vec{v}$ ვექტორით მიიღება.

ცხადია, რომ მისი მოდული უმცირესია, როცა $\vec{v}$ ვექტორი AB წრფის მართობულია.

ახლა შეიძლება $\vec{v}$ ვექტორის საძიებელი მოდული ვიპოვოთ და გამოვსახოთ ის $\vec{u}$ ვექტორის $|\vec{u}|=u$ მოდულის საშუალებით; აქ მოსწავლემ შეიძლება მესამე სურათი მოიშველიოს:



სამკუთხედების მსგავსების გამოყენებით, გვაქვს:

$\frac{v_{min}}{u}=\frac{l}{\sqrt{l^2+S^2}}$, სადაც v_{min} არის საძიებელი $\vec{v}$ ვექტორის მოდული.

აქედან გვაქვს: $$v_{min}=\frac{ul}{\sqrt{l^2+S^2}}$$

პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნა სხვადასხვა ცოდნათა (ვექტორთა ანალიზი, სამკუთხედების მსგავსება) ინტეგრირებული გამოყენების შედეგია.

კომპლექსური დავალება შეიცავს გეომეტრიული დებულებების „ვექტორული მეთოდით“ დასაბუთების მაგალითებს; მოსწავლეები, ამ მაგალითების საშუალებით, გაიაზრებენ „ვექტორული მეთოდის“ გამოყენების მოხერხებულობას, ეფექტიანობას, აქტუალურობას. შეიძლება შეამჩნიონ, რომ ვექტორების გამოყენება ამარტივებს დასაბუთების პროცესს; მაგალითად, დებულება 1-ის დასაბუთებისთვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ AP მედიანის იმ O წერტილზე, რომლისთვისაც

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}. \qquad \textbf{(1)}$$

გავლებული BM მონაკვეთი მედინააა და $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$.

მართლაც, თუ O წერტილის შერჩევის შემდეგ გავავლებთ BO წრფეს და მასზე შევარჩევთ ისეთ M წერტილს რომ $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$, ანუ

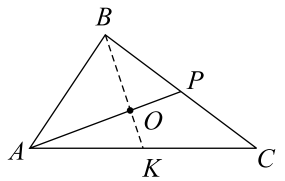
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BO} \qquad \textbf{(2)},$$

მაშინ ადვილად დავასაბუთებთ: M წერტილი AC-ს შუა წერტილია: რადგან (1) და (2)-დან

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{AO}),$$

$$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.$$

მოსწავლემ შეიძლება დასაბუთების სხვა გზა შემოგვთავაზოს:



AP მედიანაა

$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$;

$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})=$

$=\overrightarrow{BA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$;

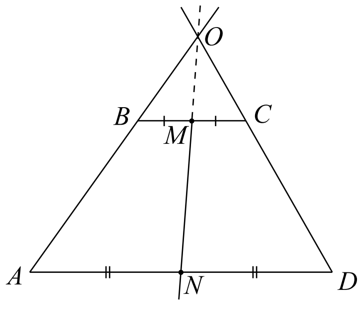
თუ K წერტილი AC-ს შუა წერტილია, მაშინ $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

მაშასადამე, $\overrightarrow{BO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$;

ამრიგად, $\overrightarrow{BO}$ ვექტორი $\overrightarrow{BK}$ „მედიანის“ კოლინეარულია და $|\overrightarrow{BO}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{BK}|$.

დებულება 2:

$ABCD$ ტრაპეციაა; AB და CD ფერდების შემცველი წრფეები O წერტილში იკვეთება; M და N წერტილები, შესაბამისად, BC და AD ფუძეების შუა წერტილებია.



დასაბუთებისთვის $\overrightarrow{ON}$ და $\overrightarrow{OM}$ ვექტორების კოლინეარულობის ჩვენებაა საკმარისი, ანუ, ისეთი k რიცხვის არსებობა, რომლისთვისაც გვაქვს:

$$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}.$$

აღმოჩნდება, რომ ეს k რიცხვი OAD და OBC სამკუთხედების მსგავსების კოეფიციენტია. მართლაც,

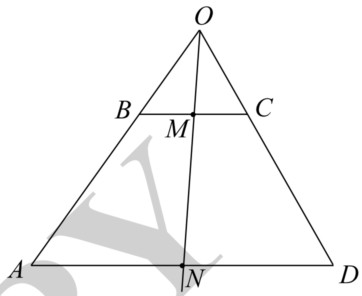
თუ $\frac{OA}{OB}=k$, მაშინ $\frac{OD}{OC}=k$, $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}$ და $\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OC}$.

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) \text{ და } \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}).$$

მაშასადამე,

$$\overrightarrow{ON}=k\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=k\overrightarrow{OM}.$$

ახლა ეს დებულება სხვა ხერხით დავასაბუთოთ; ვთქვათ, AB და CD წრფეები O წერტილში იკვეთება, M არის BC-ს შუა წერტილი. უნდა ვაჩვენოთ, რომ OM წრფე AD-ს შუა წერტილზე გადის, ანუ OM წრფის AD-სთან გადაკვეთის N წერტილი AD-ს შუა წერტილია.



$\Delta BOC \sim \Delta AOD$, ამიტომ გვაქვს:

$\frac{BO}{AO}=\frac{BC}{AD}$;

$\Delta BOM \sim \Delta AON$, ამიტომ გვაქვს:

$\frac{BO}{AO}=\frac{BM}{AN}$.

მივიღეთ: $\frac{BC}{AD}=\frac{BM}{AN}$, აქედან: $\frac{AN}{AD}=\frac{BM}{BC}=\frac{1}{2}$;
ე. ი. N წერტილი AD-ს შუა წერტილია.

როგორც ვხედავთ, ვექტორულ მეთოდს უფრო „სწრაფად" მივყავართ შედეგამდე; დამტკიცების იდეაც გასაგებია.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

საკითხები: სიდიდეები, დასაბუთების ხერხები, ვექტორები.

მკვიდრი წარმოდგენები: სიდიდეები, რომლებიც ხასიათდება რიცხვით და მიმართულებით, შეიძლება გამოისახოს მიმართული მონაკვეთებით; მიმართულ მონაკვეთებზე მოქმედებებით აღიწერება მოქმედებები სიდიდეებზე.

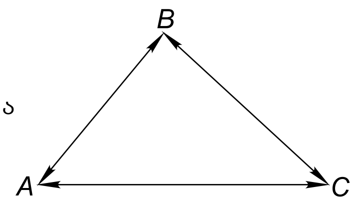
შეფასების ინდიკატორები. მოსწავლემ უნდა შეძლოს, გამოიყენოს ვექტორებზე ოპერაციები სხვადასხვა პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნისას, დებულებათა დასასაბუთებისას.

სავარაუდო დრო: 2 სთ.

თვითშეფასების ტესტს მოსწავლე დამოუკიდებლად ასრულებს. შედეგები კლასში განიხილება. მოსწავლეებმა უნდა თამამად ისაუბრონ აღმოჩენილ ხარვეზებზე. მასწავლებელი ითვალისწინებს მოსწავლეთა მოსაზრებებს, იყენებს განმავითარებელი შეფასებისთვის. მათ მიერ ამოცანების ამოხსნისა და თვითშეფასების შემდეგ, თქვენ მათ მიაწვდით თქვენ მიერ შედგენილ შეფასების რუბრიკასაც და კლასში ერთობლივად განიხილავთ წერის შედეგებს

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

(1) სულ გვაქვს 6 ვექტორი $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$.
ყველა ამ ვექტორს ტოლი მოდულები და სხვადასხვა მიმართულება აქვს.



(2) $\overrightarrow{AB}=(-8;\ 2)$

$\overrightarrow{MN}=(-m;\ n)$;

$-m=-8,\ m=8$

$n=2$.

(3) თუ $\overrightarrow{OA}=\vec{P}$, მაშინ $A=(2;\ 5)$; $\overrightarrow{OA}=(2;\ 5)$.

ვთქვათ, $B=(x_1;\ y_1)$; $C=(x_2;\ y_2)$.

მაშინ $\overrightarrow{AB}=(x_1-2;\ y_1-5)$; $\quad \begin{array}{l|l} x_1-2=2 & x_1=4 \\ y_1-5=5 & y_1=10. \end{array}$

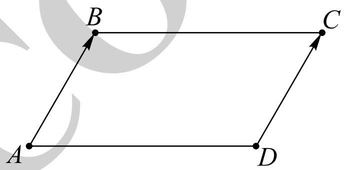
$B=(4;\ 10)$;

$\overrightarrow{BC}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)=(x_2-4;\ y_2-10)$;

$\begin{array}{l|l} x_2-4=2 & x_2=6 \\ y_2-10=5 & y_2=15. \end{array}\qquad C(6;\ 15).$

წერტილები, ცხადია, ერთ წრფეს ეკუთვნის.

(4) ვთქვათ, $A=(x;\ y)$.



ა) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\begin{array}{l|l} -1-x=2-1 & x=-2 \\ 4-y=7+3 & y=-6 \end{array}$

$A=(-2;\ -6)$.

შეიძლება ზოგიერთმა მოსწავლემ იმსჯელოს ასე: ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, თუ დიაგონალები ერთმანეთით შუაზე იყოფა, ამიტომ BD და AC დიაგონალების შუაწერტილები ერთმანეთს უნდა დაემთხვეს.

$\begin{cases} \dfrac{-1+1}{2}=\dfrac{x+2}{2} \\ \dfrac{4-3}{2}=\dfrac{y+7}{2}, \end{cases}$ საიდანაც $x=-2$; $y=-6$.

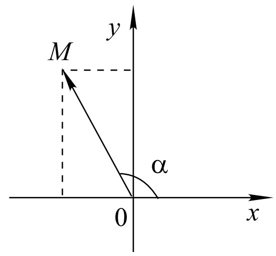
დიაგონალების სიგრძეები შეიძლება ვიპოვოთ ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულით; დიაგონალები არ არის ტოლი, ამიტომ $ABCD$ პარალელოგრამი არ არის მართკუთხედი.

(5) $\overrightarrow{OA}=(0;\ 5)$; $\ 2\overrightarrow{OA}=(0;\ 10)$; $\ \overrightarrow{AB}=(3;\ -1)$; $\ 3\overrightarrow{AB}=(9;\ -3)$; $-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}=(-4;\ 4)$.

$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=(5;\ 11)$.

ამ ვექტორის სიგრძეა: $\sqrt{25+121}=\sqrt{146}$.

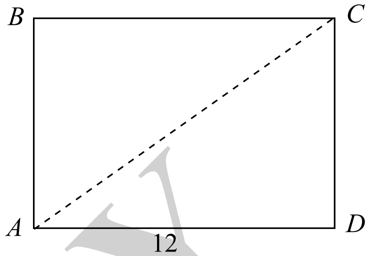
(6) $2\vec{p}-3\vec{q}=-6\vec{i}+10\vec{j}-9\vec{i}+12\vec{j}=-15\vec{i}+22\vec{j}$.



ეს ვექტორი გამოისახება $\overrightarrow{OM}=(-15;\ 22)$ მიმართული მონაკვეთით, $M=(-15;\ 22)$.

ცხადია, $\cos\alpha=-\dfrac{15}{|\overrightarrow{OM}|}$, $\sin\alpha=\dfrac{22}{|\overrightarrow{OM}|}$; $\mathrm{tg}\alpha=-\dfrac{22}{15}$.

$\boxed{7}$ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=AD\cdot AC\cos\angle CAD=AD\cdot AD=12\cdot 12=144.$



მაშასადამე, ამოცანის ამოსახსნელად AB-ს ცოდნა არ არის საჭირო. თუ ეს ფაქტი მოსწავლემ შენიშნა, მაშინ ცხადია, ის მაქსიმალურ შეფასებას დაიმსახურებს.

საზოგადოდ, ნებისმიერ $ABCD$ მართკუთხედში:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=AC\cdot AD\cdot\cos\angle CAD=AD\cdot(AC\cos\angle CAD)=AD\cdot AD=AD^2.$$

$\boxed{8}$ $|2\vec{m}-\vec{n}|=\sqrt{(2\vec{m}-\vec{n})^2}=\sqrt{4\vec{m}^2+\vec{n}^2-4\vec{m}\cdot\vec{n}}=\sqrt{4\cdot 25+9-4\cdot 5\cdot 3\cdot\frac{2}{3}}=\sqrt{69}.$

თვითშეფასების ამოცანების შეფასების რუბრიკა

(1) ამოცანაში აღწერილი ვექტორების მითითებით დაიმსახურებთ 1 ქულას, ა) და ბ) დავალებების ამოხსნით 0,5 — 0,5 ქულას. ამოცანა 2-ქულიანია.

(2) ამოცანაში ვექტორის სათავისა და ბოლოს მიხედვით თვით ვექტორის წარმოდგენით დაიმსახურებთ 1 ქულას; ვექტორთა ტოლობის ცნების ცოდნით — კიდევ 1 ქულას; m და n რიცხვების პოვნით — კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 3-ქულიანია.

(3) ამოცანაში კოორდინატთა სათავის კოორდინატების მითითებით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას; ა) დავალებაში დასმული ამოცანის ამოხსნის აღწერითა და პასუხის დადგენით დაიმსახურებთ 1 ქულას, ბ) დავალებაში დასმული ამოცანის ამოხსნის აღწერითა და პასუხის დადგენით — კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 2,5-ქულიანია.

(4) ამოცანის ვექტორების გამოყენებით ამოხსნისას, თუ მოცემული წერტილებიდან რომელიმე წყვილით იპოვით შესაბამის ვექტორს, დაიმსახურებთ 0,5 ქულას. პარალელოგრამობის რომელიმე ნიშნის მიხედვით უცნობი A წვეროს კოორდინატების დადგენით დაიმსახურებთ კიდევ 1,5 ქულას, დიაგონალების სიგრძეების დადგენით — კიდევ 1 ქულას; გ) დავალების ამოხსნით (მაგალითად, დიაგონალების სიგრძეთა შედარებით) — კიდევ 0,5 ქულას. ამოცანა 3,5-ქულიანია.

სხვა მეთოდით ამოცანის სრულფასოვანი ამოხსნა ასევე შეფასდება 3,5 ქულით.

(5) ამოცანაში მითითებული ვექტორების კოორდინატების დადგენით დაიმსახურებთ 1 ქულას, ხოლო ვექტორის რიცხვზე გამრავლებისა და ვექტორთა შეკრების დასახელებული მოქმედებების ჩატარებით — კიდევ 1,5 ქულას; საძიებელი მოდულის დაადგენით — კიდევ 0,5 ქულას, ამოცანა 3-ქულიანია.

(6) ამოცანაში კოორდინატთა ღერძების ორტების მიხედვით ვექტორების დაშლის ცოდნა და ვექტორებზე მოქმედებების შესრულება შეფასდება 1,5 ქულით; გეომეტრიული წარმოდგენებით კუთხის ტანგენსის დადგენა — კიდევ 1,5 ქულით, ამოცანა 3-ქულიანია.

(7) ამოცანაში თუ იცით სკალარული ნამრავლის ცნება, დაიმსახურებთ 0,5 ქულას, თუ დაუკავშირებთ *AC* დიაგონალს *AD* გვერდს — კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 1,5-ქულიანია.

(8) ამოცანაში ვექტორის მოდულის დაკავშირება ვექტორის სკალარულ კვადრატთან მოგანიჭებთ 1,5 ქულას, სკალარული კვადრატის პოვნა — კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 2,5-ქულიანია.

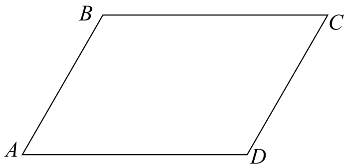
რამდენი ქულა მიიღეთ?

19-21 — დავალება შესრულებულია ძალიან კარგად (შეფასება მაღალია);
15-18 — დავალება შესრულებულია კარგად (შეფასება საშუალოზე მაღალია);
11-14 — დავალება შესრულებულია ნაწილობრივ (შეფასება საშუალოა);
11 ქულაზე ნაკლები ქულის შემთხვევაში გჭირდებათ უფრო გულმოდგინე მუშაობა (შეფასება დაბალია).

III თავის დამატებითი ამოცანები

ამოცანები შეიძლება სხვადასხვა დროს და სხვადასხვა მიზნებისთვის გამოვიყენოთ. მაგალითად, თვითშეფასების ტესტის მიხედვით აღმოჩენილი ხარვეზების აღმოფხვრისთვის.

მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად



(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$(4;\ -3)=(-2-a;\ b+1),$

$\begin{cases} 4=-2-a \\ -3=b+1 \end{cases}$

აქედან გვაქვს: $a=-6,\ b=-4.$

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}=(6;\ -4)$

თუ $D=(x;\ y)$, მაშინ $\overrightarrow{CD}=(x+6,\ y-5)$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ამიტომ $x+6=6,\ y-5=-4,$ | $x=0;\ y=1.$

(3) $B=(x;\ x)$

$(x-5)^2+(x+2)^2=169$

$2x^2-6x+29=169$

$2x^2-6x-140=0$

$x^2-3x-70=0$

$x_1=10;\ x_2=-7$

$(10;\ 10)$ ან $(-7;\ -7)$.

(4) ვთქვათ, $A=(0;\ y)$, $B=(x;\ 0)$.

$15y=240$, $y=16$; $A(0;\ 16)$.

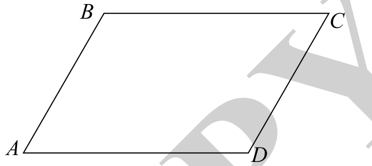
$-8x=240$, $x=-30$; $B(-30;\ 0)$

$\overrightarrow{AB}=(-30;\ -16)$.

(5) ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$;

ბ) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

ი) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}$.



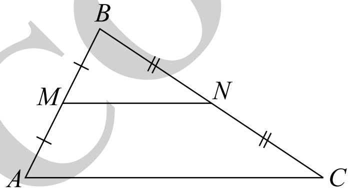
(6) $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}=3\cdot(4;\ 7)+4(6;\ -13)=(36;\ -31)$.

(7) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{AC}=(-7;\ 4)$

$\overrightarrow{MN}=(-3{,}5;\ 2)$

$\overrightarrow{MN}=-3{,}5\vec{i}+2\vec{j}$

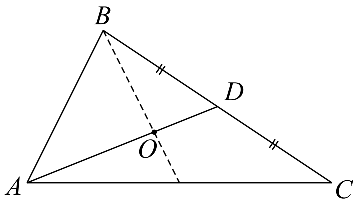


(8) ა) $D=(3;\ 2{,}5)$

$\overrightarrow{AD}=(6;\ -2{,}5)$

ვთქვათ, $O=(x;\ y)$; მაშინ $\overrightarrow{AO}=(x+3;\ y-5)$

$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=(4;\ -\frac{5}{3})$



$x+3=4$, $x=1$

$y-5=-\frac{5}{3}$, $y=\frac{10}{3}$ | $O=(1;\ \frac{10}{3})$.

ბ) $\overrightarrow{OA}=-4\vec{i}+\frac{5}{3}\vec{j}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\frac{14}{3}\vec{j}$; $\overrightarrow{OC}=3\vec{i}-\frac{19}{3}\vec{j}$;

შეიძლება ისარგებლონ მედიანის საპოვნელი ფორმულით: თუ BE მედიანაა,

$BE=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}((-5;\ -3)+(2;\ -11))=(-\frac{3}{2};\ -7)$.

$\overrightarrow{BO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}=(-1;\ -\frac{14}{3})$, $\overrightarrow{OB}=(1;\ \frac{14}{3})$, $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\frac{14}{3}\vec{j}$.

გ) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(0;\ 0)$.

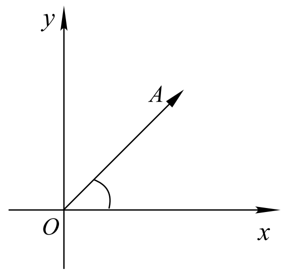
(9) $|\overrightarrow{OA}|=20$, $\overrightarrow{OA}=(x;\ y)$

$cos\alpha=\frac{x}{20}$, $sin\alpha=\frac{y}{20}$.

ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{x}{20}$, $x=10\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}=\frac{y}{20}$, $y=10$

$\overrightarrow{OA}=(10\sqrt{3};\ 10)$.



ბ) თუ $\alpha=-45$, $cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

მაშინ $x=20\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$,

$y=20\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-10\sqrt{2}$.

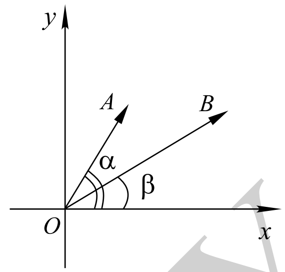
(10) $|\overrightarrow{OA}|=a$

$|\overrightarrow{OB}|=b$.

$\overrightarrow{OA}=(acos\alpha;\ asin\alpha)$

$\overrightarrow{OB}=(bcos\beta;\ bsin\beta)$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(acos\alpha+bcos\beta;\ asin\alpha+bsin\beta)$.



(11) $A=(3;\ 5)$, თუ $C_1=(x_1;\ y_1)$, მაშინ $\overrightarrow{AC_1}=(x_1-3;\ y_1-5)$, $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{(x_1-3)^2+(y_1-5)^2}$.

თუ $C_2=(x_2;\ y_2)$, მაშინ $|\overrightarrow{AC_2}|=\sqrt{(x_2-3)^2+(y_2-5)^2}$.

ა) შეიძლება შეარჩიოთ ისეთი x_1, x_2, y_1, y_2 რიცხვები, რომ გვქონდეს, მაგალითად,

$x_1-3=3;\ y_1-5=4;$

$x_2-3=4;\ y_2-5=3.$

საიდანაც $C_1(6;\ 9)$, $C_2=(7;\ 8)$.

ბ) თუ ავიღებთ, მაგალითად, $x_1=0$, $y_1=0$,

მაშინ $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$ — ირაციონალური რიცხვია.

(12) $|\overrightarrow{AB}|x=|\overrightarrow{CD}|$ განტოლებას ერთადერთი ამონახსნი აქვს, როცა $|\overrightarrow{AB}|\neq 0$;

უამრავი ამონახსნი აქვს, როცა $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|=0$, აქ უნდა ავიღოთ წერტილები: $B=(6;\ 7)$; $D=(4;\ 5)$.

არ აქვს ამონახსნი, როცა $|\overrightarrow{AB}|=0$ და $|\overrightarrow{CD}|\neq 0$. ავიღოთ $B=(6;\ 7)$, $D\neq(4;\ 5)$, D არის C-სგან განსხვავებული ნებისმიერი წერტილი.

(13) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4}=2$; $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{25}=5$; $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{49}=7$.

$2x^2+5x-7=0$

$D=25+56=81$; $x_1=-\frac{7}{2}$, $x_2=1$.

(14) ტოლგვერდა სამკუთხედის თითოეული კუთხე 60^0-ია, გარე კუთხე — 120^0.

ბ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=8\cdot 8\cdot cos120^0=-32$.

(15) $10\cdot 10cosA=50$, $cosA=\frac{1}{2}$, $sinA=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $S=10\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$.

(16) $\overrightarrow{OC}=(5;\ 0)$, $\overrightarrow{OC}=5\vec{i}$;

$\overrightarrow{OG}=(-2;\ 4)$, $\overrightarrow{OG}=-2\vec{i}+4\vec{j}$.

(19) $|3\vec{m}-2\vec{n}|=\sqrt{(3\vec{m}-2\vec{n})^2}=\sqrt{9\vec{m}^2+4\vec{n}^2-12\vec{m}\cdot\vec{n}}=\sqrt{36+100-12\cdot 2\cdot 5\cdot\frac{3}{5}}=8$.

შემაჯამებელი წერა №4

თემატური ბლოკი: სიდიდეები, ვექტორი.

სამიზნე ცნებები: გეომეტრიული ობიექტები და მათ შორის კავშირები, ვექტორები.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს ვეტორებზე მოქმედებების შესრულება, ვექტორების გამოყენება გეომეტრიული ფიგურების ელემენტებთან დაკავშირებით.

ამოცანების ნიმუშები:

1) მოცემულია $\vec{a}(3;\ -4)$ და $\vec{b}(5;\ 1)$ ვექტორები. იპოვეთ $2\vec{a}+3\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები.

2) $\vec{a}(x_0;\ -24)$ ვექტორის სიგრძე 26 ერთეულია. იპოვეთ x_0.

3) $A(3;\ 2)$, $B(5;\ 4)$ და $C(6;\ -4)$ სამკუთხედის წვეროებია, O არის ამ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ $\overrightarrow{AO}$ ვექტორის კოორდინატები.

4) $ABCD$ პარალელოგრამია, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით $\overrightarrow{AM}$ ვექტორი, თუ ცნობილია, რომ $M\in BC$ და $BM:MC=1:4$.

5) $A(7;\ y)$ საკოორდინატო სიბრტყის წერტილია, O სათავეა, α არის $\overrightarrow{OA}$ ვექტორის მიერ OX ღერძთან შედგენილი კუთხე. ცნობილია, რომ $\cos\alpha=0{,}28$, $\sin\alpha=-0{,}96$. იპოვეთ $\overrightarrow{OA}$ ვექტორის მოდული და კოორდინატები.

6) $A(5;\ 4)$, $B(7;\ b)$, $C(a;\ -5)$, $D(0;\ -2)$ არის $ABCD$ პარალელოგრამის წვეროები. იპოვეთ დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები, a და b.

7) $A(5;\ 3)$, $B(2;\ 0)$ და $C(8;\ -1)$ საკოორდინატო სიბრტყის წერტილებია. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი.

პასუხები: 1) $(21;\ -5)$. 2) $x_0=10$, ან $x_0=-10$. 3) $(\frac{5}{3};\ -\frac{4}{3})$. 4) $\vec{a}+0{,}2\vec{b}$. 5) $|\overrightarrow{OA}|=25$ ერთეული, $\overrightarrow{OA}(7;\ -24)$. 6) $(3{,}5;\ -0{,}5)$, $a=2$, $b=1$. 7) $\frac{1}{5\sqrt{2}}$.

მითითებები:

3) შეიძლება მოსწავლეებმა იპოვონ კოორდინატები, ჯერ BC გვერდის D შუა წერტილის, შემდეგ — $\overrightarrow{AD}$ ვექტორის და $\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ ვექტორის.

შესაძლოა გამოიყენონ მედიანის ფორმულა: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

(5) მოსწავლე A-ს პირველი კოორდინატის და $cos\alpha$-ს საშუალებით ჯერ გამოთვლის $\overrightarrow{OA}$ ვექტორის მოდულს (სიგრძეს): $|\overrightarrow{OA}|=\frac{7}{cos\alpha}=25$; შემდეგ $\frac{|y|}{25}=0{,}96$ ტოლობიდან მიიღებს: $|y|=24$ და იმის გათვალისწინებით, რომ α არის IV მეოთხედის კუთხე, დაადგენს: $y=-24$.

(7) $\overrightarrow{AB}=(-3;\ -3)$, $\overrightarrow{AC}=(3;\ -4)$, .
ვიყენებთ ორ ვექტორს შორის კუთხის კოსინუსის ფორმულას: $cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$.
მივიღებთ: $cos\alpha=\frac{-9+12}{3\sqrt{2}\cdot 5}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$.
შესაძლებელია სამკუთხედის გვერდების სიგრძეთა დადგენის შემდგომ კოსინუსების თეორემის გამოყენებითაც გადაიჭრას ეს ამოცანა.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

გთავაზობთ, (1)-(4) ამოცანებიდან თითოეული შეფასდეს 1 ქულით, (5)-(7) ამოცანები — ორ-ორი ქულით.

(1) $2\vec{a}$, ან $3\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატების დადგენა — 0,5 ქულა, ჯამის პოვნა — კიდევ 0,5 ქულა.

(2) პითაგორას თეორემის გამოყენებით განტოლების $x-2$ შედგენა x_0-ის მიმართ შეფასდეს 0,5 ქულით, განტოლების ამოხსნა და პასუხების დაფიქსირება — კიდევ 0,5 ქულით.

(3) D ან O წერტილებიდან რომელიმეს, ან $\overrightarrow{AD}$ ვექტორის კოორდინატების პოვნა შეფასდეს 0,5 ქულით, $\overrightarrow{AO}$ ვექტორის კოორდინატების პოვნა — კიდევ 0,5 ქულით.

(4) 0,5 ქულით შეფასდეს $\overrightarrow{BM}$ ვექტორის გამოსახვა $\vec{b}$ ვექტორის საშუალებით; კიდევ 0,5 ქულით — $\overrightarrow{AM}$ ვექტორის გამოსახვა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.

(5) 0,5 ქულით შეფასდეს $\overrightarrow{OA}$ ვექტორის მოდულის პოვნა, კიდევ 0,5 ქულით — y-ის პოვნა.

(6) შეფასდეს 0,5 ქულით $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{DC}$ ვექტორების გამოსახვა კოორდინატებში; მათი ტოლობის გათვალისწინებით a-სა და b-ს პოვნა — კიდევ 0,5 ქულით. 1 ქულა დაემატოს დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის პოვნისთვის.

(7) ვექტორების კოორდინატების დადგენა შეფასდეს 0,5 ქულით, ვექტორთა სკალარული ნამრავლის პოვნა კოორდინატების მიხედვით — კიდევ 0,5 ქულით, ვექტორთა მოდულების პოვნა — 0,5 ქულით, საძიებელი სიდიდის პოვნა — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

აქვე შევნიშნავთ, რომ თითოეული ამოცანის ამოხსნის განსხვავებული გზა, ან ამოხსნის ძიებისას გადადგმული „რაციონალური ნაბიჯები“ უნდა შეფასდეს სათანადო ქულებით.

სასწავლო პროცესის ყოველი აქტივობა უნდა გამოვიყენოთ განმავითარებელი შეფასებისთვის. შემაჯამებელი წერის განმსაზღვრელი შეფასება გამორჩეულია თავისი მნიშვნელობით. ამიტომ მისი დაკავშირება განმავითარებელ შეფასებასთან საყურადღებო და აქტუალურ აქტივობად უნდა იქცეს. ვფიქრობთ, ჩვენი რეკომენდაციები შეიძლება დაეხმაროს თქვენს მუშაობას.

მიუხედავად იმისა, რომ ეს შემაჯამებელი ამოცანები ადრე განხილულ და არც თუ რთულ საკითხებს უკავშირდება, მხოლოდ განმსაზღვრელი შეფასებით შემოფარგვლა, შესაძლოა, ღიად დატოვებს არაერთ კითხვას და მოსწავლეთათვის პრობლემურ საკითხებს. ეს ვარაუდი მრავალი სარწმუნო კვლევითა და ერთიანი ეროვნული გამოცდების შედეგებითაც დასტურდება. განმავითარებელი შეფასებისას შესწავლილის გამეორება, საჯარო განხილვა ხელს შეუწყობს ამ საკითხების უკეთ აღქმას. სწორედ ამიტომ ვიყენებთ განმსაზღვრელ შეფასებას განმავითარებელი შეფასების ინსტრუმენტად.

მრავალწლიანმა სასწავლო პრაქტიკამ ნათლად წარმოაჩინა ახალი შეფასებებისას წინმსწრები და შემდგომი მეტაკოგნიტური პაუზების, ჯგუფური და ინტერაქტიული განხილვების, ამოცანათა ამოხსნის სხვადასხვა გზის ძიების და მათი შედარების ქმედითობა. ასეთი მიდგომა — შემოქმედებითი ჩართულობა საკითხების განხილვაში, მკვეთრად ამაღლებს მოსწავლეთა მოტივაციასაც შემდგომ მუშაობაში.

1 ამოცანის განხილვა დაიწყეთ ვექტორის ცნებისა და მისი კოორდინატების განსაზღვრებიდან, აღწერეთ კოორდინატებით წარმოდგენილი ვექტორის რიცხვზე ნამრავლისა და ვექტორთა ჯამის ფორმულები კითხვა-პასუხის რეჟიმში, მოსწავლეთა მაქსიმალური ჩართულობით.

2 ვექტორის სიგრძის ფორმულის დაფაზე ჩაწერა მოსწავლეებს დაავალეთ. მისი გამოყენებით კლასს აღარ გაუჭირდება უცნობი კოორდინატის მიმართ კვადრატული განტოლების მიღება. არაა გამორიცხული, რომ ამ განტოლების ამოხსნა ზოგიერთი მოსწავლისთვის რთული აღმოჩნდეს. თქვენ მოგეცემათ შესაძლებლობა, კლასის დახმარებით, ეს ხარვეზიც აღმოფხვრათ.

3 ამოცანაც ცნობილ საკითხებს უკავშირდება, კერძოდ, სამკუთხედის მედიანათა გადაკვეთის წერტილის თვისებას. აქვე მოგიწევთ, კლასთან ერთად, მოცემულ წერტილთა დალაგებული წყვილით მიმართული მონაკვეთის — ვექტორის წარმოდგენა. დაუსვით კითხვა კლასს — რა გზებით შეიძლება საძიებელი ვექტორის დადგენა? ეს კითხვა, უთუოდ, საინტერესო მსჯელობის საგნად იქცევა. შემდეგ კი აღწერილ გზებს შორის რომელს მიანიჭებენ უპირატესობას და რატომ — ეს ანალიზიც საყურადღებოა.

4 ამოცანის განხილვისას ვექტორთა ჯამისა და მონაკვეთის პროპორციულ ნაწილებად დაყოფის შესახებ მოუწევს კლასს მსჯელობა. მათი განხილვა-გახსენება მოსწავლეთა მზაობას აამაღლებს სხვა არაერთი ამოცანის ამოხსნის დროს.

5 ამოცანაც არაერთი საკითხის ცოდნას უკავშირდება და მათი საჯარო განხილვა-გახსენება მოსწავლეებს შემდგომ მუშაობაში შეუწყობს ხელს. კერძოდ, ტრიგონომეტრიის ჩართვა ვექტორებთან დაკავშირებულ საკითხებში პრობლემის გადაჭრის საუკეთესო გზას წარმოადგენს.

(6) ამოცანის ამოხსნა უკავშირდება წინა ამოცანებში განხილული მეთოდების გამოყენებას. ეს აამაღლებს მოსწავლეთა ჩართულობას და გაამყარებს მათ ცოდნას აღნიშნული საკითხების შესახებ.

(7) ამოცანაში დასმული ვექტორთა კოორდინატების დადგენის საკითხი ადრეც არაერთხელ დასმულა, ამიტომ ამ საკითხს მოსწავლეები, ალბათ, იოლად გადაჭრიან. შემდგომი განსჯა ვექტორთა სკალარულ ნამრავლს დაუკავშირდება და საძიებელი კუთხის კოსინუსსაც ამ ნამრავლის ფორმულით მიაკვლევენ მოსწავლეები. ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება სამკუთხედის გვერდების სიგრძეების პოვნა და შემდეგ კოსინუსების თეორემის გამოყენებით დაასრულოს ამოცანის ამოხსნა. კლასმა შეადაროს ეს ორი მიდგომა და შეაფასოს რომელი უფრო რაციონალურია მოცემულ შემთხვევაში.

III თავის შემაჯამებელი წერის მიხედვით შეიძლება დააკონკრეტოთ „სოლო ტაქსონომიის“ ზოგადი ფორმით წარმოდგენილი მოსწავლეთა მიღწევების დონეები.

1. **პრესტრუქტურული დონე.** მოსწავლეს აქვს ბუნდოვანი წარმოდგენა სიმრავლეებზე ჩასატარებელი მოქმედებების, ვექტორებზე მოქმედებების შესახებ, ვერ ახერხებს ვექტორის კოორდინატებით წარმოდგენას. უჭირს გადმოსცეს ტექსტურად მოცემული ამოცანის შინაარსი, მოცემულ ამოცანას ვერ უკავშირებს ვენის დიაგრამას.

2. **უნისტრუქტურული დონე.** მოსწავლეს შეუძლია ჩანაწერის მიხედვით სიმრავლის აღწერა; ცდილობს, მეტწილად ხარვეზებით, საჯარო განხილვით მიღებული შედეგების ინტერპრეტაციას; არამკაფიოდ, მაგრამ მაინც ახერხებს ტექსტური ამოცანის შინაარსის გადმოცემას; იყენებს ადეკვატურ ტერმინოლოგიას და ერთვება ვენის დიაგრამის განხილვის პროცესში.

3. **მულტისტრუქტურული დონე.** სწორად გადმოსცემს სიმრავლეებზე მოქმედების არსს, მაგრამ პრაქტიკული ამოცანების განხილვისას ზოგჯერ უშვებს შეცდომებს; აქტიურად ერთვება ვექტორებთან დაკავშირებული საკითხების საჯარო განხილვაში, თუმცა ტრიგონომეტრიის ჩართვა პრობლემურია მისთვის; არ არის ინიციატორი, თუმცა აქტიურია ვენის დიაგრამის გამოყენების პროცესში და ასრულებს სათანადო მოქმედებებს. შეუძლია ტექსტური ამოცანის შინაარსის მკაფიოდ გადმოცემა.

4. **მიმართებითი დონე.** მოსწავლეს ნათელი წარმოდგენა აქვს სიმრავლეებზე მოქმედებების შესახებ; თანამიმდევრულად, რაიმე სერიოზული ხარვეზის გარეშე გადმოსცემს ამოცანის ამოხსნის დეტალებსაც კი, ბოლომდე მიყვება ამოხსნის გზას; შეუძლია საკითხის კვლევაში სხვადასხვა მეთოდის ჩართვა და მთელი ამოცანის ამოხსნის ერთიანი გზის დასახვა; სამუშაოს დასრულებისას აანალიზებს გაწეულ სამუშაოს.

5. **გაფართოებული აბსტრაქტული დონე.** ამოცანის გააზრებისას გამოთქვამს მრავალმხრივ მიდგომას დასმული პრობლემისადმი; ახასიათებს დახვეწილი და ლოგიკურად გამართული მსჯელობა; ავლენს უნარებს, რომლებითაც გაცილებით რთული და ზოგადი ამოცანების გადაწყვეტაა შესაძლებელი; აანალიზებს ამოცანის ამოხსნის შესაძლო გზებს და ირჩევს საუკეთესოს, ოპტიმალურს; თავისი მსჯელობით ახერხებს სხვათა დაინტერესებას და ჩართვას კვლევის პროცესში.

IV თავი

თვლის ზოგიერთი პოზიციური სისტემა. რიცხვები. მოქმედებები რიცხვებზე

<table>
<tr><td colspan="4">თემები: ათობითი და არაათობითი პოზიციური სისტემები; რიცხვები; ალგებრული გამოსახულების გარდაქმნები; ირაციონალური რიცხვები და პითაგორას თეორემა</td></tr>
<tr><th>სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვები</th><th>კომპლექსური დავალება</th></tr>
<tr><td>ნატურალური რიცხვების ჩაწერის სხვადასხვა სისტემა; ნამდვილი რიცხვები და მათი გამოყენება; რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი, ხარისხის და ფესვის თვისებები.

ნატურალური რიცხვების ჩასაწერად შეიძლება გამოვიყენოთ არაათობითი პოზიციური სისტემაც</td><td>არაათობითი პოზიციური სისტემები; ნამდვილი რიცხვები და მათი გამოყენება სიდიდეების წარმოსადგენად</td><td>რა უპირატესობა აქვს პოზიციურ სისტემებს?

რატომ იყენებენ ტექნოლოგიებში ორობით სისტემას?</td><td>რიცხვების ჩაწერის სხვადასხვა წესი – თვლის სისტემები</td></tr>
<tr><td colspan="4">შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს რიცხვის ჩაწერის სხვადასხვა პოზიციური სისტემის გააზრება, კავშირის დამყარება სხვადასხვა პოზიციურ სისტემაში (მაგალითად, ორობით და ათობით) რიცხვის ჩანაწერებს შორის; ნაშთთა არითმეტიკის ელემენტების გამოყენება; სიდიდეების წარმოდგენა რიცხვებით; რიცხვების, რიცხვითი გამოსახულებების და სიდიდეების წარმოდგენა ეკვივალენტური ფორმით (მათ. საშ. 1); გეომეტრიული ობიექტების განსაზღვრებათა და თვისებათა სწორად ჩამოყალიბება; გეომეტრიული ობიექტის ზომის გამოთვლა (მათ. საშ. 4); ალგებრულ გამოსახულებათა ფორმებს შორის კავშირის დამყარება; მოვლენების მათემატიკური მოდელირება (მაგალითად, ალგებრული გამოსახულების სახით) და პრობლემის გადაჭრა (მათ. საშ. 2).</td></tr>
</table>

მე-4 თავში ვაჯამებთ ცოდნას რიცხვების შესახებ. მოსწავლეთათვის ახალია მხოლოდ თვლის ისეთი პოზიციური სისტემის განხილვა, როცა ფუძე 10-ისგან განსხვავებული 1-ზე მეტი ნატურალური რიცხვია. ყურადღება გამახვილებულია ორობით სისტემაზე და ახსნილია მისი გამოყენების მნიშვნელობა.

ჩვეულებრივი ენის მსგავსად, რიცხვების ენასაც თავისი „ანბანი" აქვს. იმ ენაში, რომელსაც ჩვენ ვიყენებთ „ანბანი" 10 ციფრისგან შედგება. ამ „ენას" თვლის ათობითი სისტემა ეწოდება. მასწავლებელმა უნდა იცოდეს, რომ მათემატიკის თვალსაზრისით არც ერთ პოზიციურ სისტემას არა აქვს უპირატესობა სხვასთან შედარებით. ყოველი პოზიციური სისტემა ერთი პრინციპით აიგება — აირჩევა რაიმე რიცხვი, მაგალითად, p, ის მიიღება სისტემის ფუძედ, ყოველი n ნატურალური რიცხვი წარმოიდგინება ამ p რიცხვის თანამიმდევრული ხარისხების სახით, ამასთანავე, კოეფიციენტების მნიშვნელობები 0-დან (p–1)-მდეა.

$$n=a_kp^k+a_{k-1}p^{k-1} + \dots + a_1p+a_0.$$

შემოკლებით ასე ჩაიწერება:

$$n=(a_ka_{k-1} \dots a_1a_0)_p.$$

ამ ჩანაწერში ყოველი ციფრის „მნიშვნელობა" დამოკიდებულია მის მიერ დაკავებულ ადგილზე (პოზიციაზე). მაგალითად, $(222)_{10}$ ჩანაწერში 2 მონაწილეობს სამჯერ. მარჯვნივ, პირველი 2 ნიშნავს 2 ერთეულს, შემდეგი — 2 ათეულს, შემდეგი — 2 ასეულს; თუ $p>2$, მაშინ $(222)_p$ ჩანაწერში 2-ები შესაბამისად ნიშნავს — 2-ს, $2p$-ს, $2p^2$-ს.

ამავე თავში გათვალისწინებულია ზოგიერთი საკითხის გამეორებაც. ახალი საკითხების შესწავლის პარალელურად, საშუალო საფეხურზე მე-10 კლასიდან დავიწყეთ დაწყებით და საბაზო საფეხურზე შესწავლილი საკითხების გამეორებაც; ეს შეესაბამება საშუალო საფეხურზე სწავლების მისიას — მზადება სკოლის შემდგომი საქმიანობისთვის.

4.1 თვლის ზოგიერთი პოზიციური სისტემა

თვლის სისტემებზე საუბარს ათობითი პოზიციური სისტემის ანალიზით ვიწყებთ. მოსწავლეებს ვთხოვთ, ტექსტში წარმოდგენილი მაგალითის ანალოგიურად, ჩაწერონ სხვა რიცხვებიც სათანრიგო შესაკრებების ჯამის სახით. მოსწავლეებმა კარგად უნდა გაიაზრონ, რატომ ეწოდება განხილულ სისტემას ათობითი სისტემა და რატომ არის აღნიშნული, რომ ეს სისტემა პოზიციური სისტემაა — მნიშვნელობა აქვს თითოეული ციფრის ადგილს (პოზიციას) ჩანაწერში. ვიხილავთ ერთი და იმავე ციფრის სხვადასხვა მნიშვნელობას, როცა ეს ციფრი რიცხვის ჩანაწერში სხვადასხვა პოზიციაზეა წარმოდგენილი. სხვადასხვა ფუძის გამოყენების კონკრეტული მაგალითების განხილვა დაეხმარება მოსწავლეებს, გაიაზრონ ნებისმიერი b ფუძის შემთხვევაში რიცხვის სათანრიგო შესაკრებებად ჩაწერა.

მასწავლებლებმა უნდა იცოდნენ, რომ ჩანაწერის არსებობა და ერთადერთობა (ნებისმიერი ფუძის შემთხვევაში) შეიძლება დამტკიცდეს მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. ცხადია, სკოლაში მხოლოდ კონკრეტულ მაგალითებს განვიხილავთ და,

ამ კონკრეტული მაგალითების გამოყენებით, ათობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვები „გადაგვყავს“ სხვა სისტემაში. ეს პროცესი დაკავშირებულია ნაშთიანი გაყოფის ალგორითმთან და მისი ათვისება არ უნდა გაუჭირდეთ მოსწავლეებს. ყოველმა მოსწავლემ უნდა შეძლოს, მაგალითად, ათობითი ჩანაწერიდან ორობით სისტემაზე გადასვლა.

მოსწავლემ უნდა გაიაზროს, რომ, მაგალითად, სამობით სისტემაში მხოლოდ სამი ციფრი გვაქვს, ეს ციფრები შეიძლება იყოს 0, 1 და 2. სათანრიგო შესაკრებების ჯამად წარმოდგენას, ჩვენ მოკლედ — გაშლილი ფორმით ჩაწერა ვუწოდეთ (უცხოურ წიგნებში, ხშირად, ეს ტერმინი გამოიყენება).

„ტესტებში“ სწორი პასუხების დადგენა არ უნდა გაუჭირდეთ მოსწავლეებს. 8 „ტესტი“-ის ამოხსნისას, მოსწავლეებს შეიძლება ავუხსნათ, რომ ორობით სისტემაში ორი ციფრი გვაქვს და ციფრებად აიღება 0 და 1; სამობით სისტემაში — 0, 1, 2; ოთხობით სისტემაში — 0, 1, 2, 3; ხუთობით სისტემაში — 0, 1, 2, 3, 4. თუ ფუძე 10-ზე მეტია, ცხადია, დაგვჭირდება ახალი ციფრების (ნიშნების) შემოღება. მაგალითად, 12-ობით სისტემაში 12-ის ხარისხების კოეფიციენტები იქნება რიცხვები: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; და, მაშასადამე, 10 და 11-ისთვის უნდა შემოვიღოთ სხვა აღნიშვნები.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

10 ა) ამოსახსნელია განტოლება: $1+x^3=28$, $x=3$;

ბ) $1+2x^2=33$, $x=4$;

გ) $(2+x+3x^2)+(3+x+2x^2)=140$; $x=5$;

დ) $(3x+1)(2x+2)=130$; $3x^2+4x-64=0$, $x=4$.

12 ბ) $111\ 010\ 100\ 001\ 101)_2=(72415)_8$; აქ გამოვიყენეთ სახელმძღვანელოს ტექსტში განხილული მაგალითი 3.

13 ნებისმიერი რიცხვი ჩაიწერება სამობით სისტემაში. მაშასადამე, ნებისმიერ რიცხვს გამოვსახავთ 3-ის ხარისხებით. შესაბამისად, ავწონით ნებისმიერი მასის ტვირთს „3-ის ხარისხებიანი“ საწონებით, თუმცა, შეიძლება მოგვიწიოს ზოგიერთი საწონის ტვირთის მხარეს დადება. მაგალითად, 200 გრამი ტვირთის აწონისას, ტვირთის მხარეს ვდებთ 3^4გ და 3^0გ საწონებს, ტვირთის საწინააღმდეგო მხარეს — 3^5გ, 3^3გ, 3^2გ და 3^1გ საწონებს. მივიღებთ, რომ ტოლობის ორივე მხარე მხოლოდ 3-ის ხარისხებს შეიცავს.

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ 3-ის ხარისხების ჯამის ან სხვაობის სახით, სადაც ყოველი ხარისხი თითოჯერ იქნება გამოყენებული. ეს ნიშნავს, რომ ნებისმიერი n მასის ($n \in N$) ტვირთის აწონვისას თუ n-ს წარმოვადგენთ 3-ის ხარისხების აქ აღწერილი ფორმით და მინუსნიშნიან შესაკრებებს („საწონებს“) „ტვირთისკენ“ გადავიტანთ, შევძლებთ ტვირთის აწონვას აღნიშნული წესით.

15 ა) $(1001)_t=t^3+1=65$, $t^3=64$, $t=4$;

ბ) $2t^2+1=51$, $2t^2=50$, $t=5$.

16 ა) $734_{16}=7\cdot16^2+3\cdot16+4$;

$24EF_{16}=2\cdot16^3+4\cdot16^2+14\cdot16+15$.

ბ) $307=16^2+3\cdot16+3$,

$(307)_{10}=(133)_{16}$.

აქ არ დაგვჭირდა სხვა (9-ზე მეტი) ციფრები

$34721=8\cdot16^3+7\cdot16^2+10\cdot16+1$.

მაშასადამე, პირობის თანახმად,

$(34721)_{10}=(87A1)_{16}$;   აქ $A=10$.

შეიძლება ასეც ვიმოქმედოთ:

34 721	16			
1	2170	16		
	10	135	16	
		7	8	16
			8	0

17 პირობის თანახმად,

$b^2+b+1=43$, აქედან $b=6$.

19 $(3054)_8=3\cdot8^3+5\cdot8+4=1580$.

1580	12		
8	131	12	
	11	10	12
		10	0

ანუ $1580=10\cdot12^2+11\cdot12+8$.

$(3054)_8=(AB8)_{12}$

აქ $A=10$, $B=11$.

11 გვაქვს: $1+2+*\cdot2^2+2^4=19$; $*=0$.

12 $(160346)_8=1\ 110\ 000\ 011\ 100\ 110$,

რადგან $(6)_8=(110)_2$, $(4)_8=(100)_2$, $(3)_8=(011)_2$.

4.2 რაციონალური რიცხვები. რიცხვის ხარისხი

ამ გაკვეთილიდან ვიწყებთ გამეორებას. 4.2. პარაგრაფი ნატურალურ, მთელ და რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების შესახებ ცოდნის გამეორებას ეძღვნება. ამ ცნებების განხილვის პროცესს არ ახლავს „ფსევდო“ განსაზღვრებები: ნატურალური რიცხვები ეწოდება თვლის შედეგად მიღებულ რიცხვებს; რაციონალური რიცხვი ეწოდება რიცხვს (?), რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს $\frac{m}{n}$ ($m\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{N}$) სახით. მასწავლებელიც უნდა მოერიდოს ასეთი კითხვის დასმას: რას ეწოდება ნატურალური რიცხვი? რას ეწოდება რაციონალური რიცხვი? მოსწავლემ უნდა შეძლოს დაასახელოს ნატურალური რიცხვი, მთელი რიცხვი, რაციონალური რიცხვი; უნდა შეძლოს, მიუთითოს ამ რიცხვების გამოყენების მაგალითები; უნდა შეძლოს მიუთითოს – რა მიმართებებია სხვადასხვა რიცხვით სიმრავლეებს შორის; გამოსახოს ვენის დიაგრამებით ეს მიმართებები. მასწავლებელმა უნდა იცოდეს, რომ არსებობს რიცხვების შემოღების სხვადასხვა მეცნიერული წესი — მაგალითად, აქსიომური მეთოდი, პეანოს აქსიომებით (რიგობითი ასპექტის წინ წამოწევა), ან სიმრავლეების ურთიერთცალსახა შესაბამისობის საფუძველზე (რაოდენობითი ასპექტი) ნატურალური რიცხვების შემოღება. მასწავლებელი უნდა იცნობდეს წილადების სიმრავლეში, ეკვივალენტობის მიმართების საფუძველზე, რაციონალური რიცხვების შემოღებას, ან ალგებრული სტრუქტურების გამოყენებას, ამ რიცხვების შემოღებისას. მაშინ მან შეიძლება კარგად აუხსნას მოსწავლეებს, რომ, მაგალითად, $\frac{3}{5}$; $\frac{6}{10}$; 0,6 ერთი და იმავე რაციონალური რიცხვის სხვადასხვა ჩანაწერია (რიცხვი ერთია, ჩანაწერი — სამი). ეს რიცხვი პროცენტითაც შეიძლება გამოისახოს. მეცნიერულია მიდგომა — პროცენტი რიცხვის ჩაწერის ერთ-ერთი ფორმაა; სიდიდის 60%-ის პოვნა კი იგივეა, რაც ამ სიდიდის $\frac{3}{5}$-ის პოვნა.

ახსნილია ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხი და მისი თვისებები; ხარისხი მთელი მაჩვენებლით; რიცხვის მოდული და მისი გეომეტრიული აზრი.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

(30) აქ ორი თეორემაა დასამტკიცებელი. ვთქვათ, რიცხვი დადებითი რაციონალური რიცხვია, მაშინ ის შეიძლება ჩაიწეროს $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადის სახით, m მთელია, n — ნატურალური. თუ n=1, ეს რიცხვი ნატურალური რიცხვია; თუ n-ის მარტივი გამყოფი შეიძლება იყოს მხოლოდ 2 ან 5, მაშინ ის ჩაიწერება სასრული ათწილადის სახით; წინააღმდეგ შემთხვევაში, მივიღებთ უსასრულო პერიოდულ ათწილადს, რადგან m-ის n-ზე გაყოფისას ნაშთი შეიძლება იყოს 0, 1, 2, ... , (n–1), მაშასადამე, ნაშთები აუცილებლად დაიწყებს გამეორებას, სულ დიდი n–1 თანრიგის შემდეგ.

ახლა შებრუნებული თეორემა დავამტკიცოთ: ყოველი ნატურალური რიცხვი რაციონალური რიცხვია; ყოველი ათწილადი ჩაიწერება $\frac{m}{n}$ სახით; ყოველი ათწილადით რაციონალური რიცხვი გამოისახება; ყოველი უსასრულო პერიოდული ათწილადი ჩაიწერება $\frac{m}{n}$ სახით, რომელიც რაციონალურ რიცხვს წარმოგვიდგენს.

33 $6{,}6=5{,}600...=5{,}6(0)$.

35 $0{,}75;\ \frac{2}{10};\ \frac{1}{5};\ 0{,}2;\ \frac{3}{4};\ 5.$

აქ 0,75 და $\frac{3}{4}$ ერთი და იმავე რაციონალური რიცხვის სხვადასხვა ჩანაწერია. $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{5}$ და 0,2 — ერთი და იმავე რაციონალური რიცხვის ჩანაწერებია. მაშასადამე, აქ წარმოდგენილია 3 სხვადასხვა რაციონალური რიცხვი.

36 $0{,}(23)=\frac{23}{99};\ 5{,}2(25)=5\frac{225-2}{990}.$

39 $3\cdot\frac{m}{n}=\frac{m+n}{2n},\qquad 6m=m+n,\qquad 5m=n,$

$n=5,\quad m=1;\quad \frac{1}{5}.$

31 $x \to 2x \to 6x.$

$\frac{5x}{x}\cdot 100\%=500\%.$

35 $2\frac{m}{n}=\frac{m+10}{n+10}$

$2mn+20m=mn+10n$

$mn+20m=10n$

$m(n+20)=10n$

$m=\frac{10n}{n+20};\ m=\frac{10n+200-200}{n+20}=\frac{10(n+20)}{n+20}-\frac{200}{n+20};\ m=10-\frac{200}{n+20};$

200 უნდა იყოფოდეს $n+20$-ზე, $n+20=200$, $n+20=100$, $n+20=50$ ან $n+20=25$. უკეთესი წილადი მიიღება, როცა $n+20=25$, აქედან, $n=5$, $m=2$.

41 თუ დავუშვებთ, რომ პერიოდული ათწილადია და პერიოდი შედგება k ციფრისგან, მაშინ ამ უსასრულო ათწილადში ვიპოვით „ადგილს", რომლის შემდეგ გვაქვს k-ზე მეტი რაოდენობის ნული. მივიღებთ წინააღმდეგობას.

4.3 კვადრატული ფესვი, ირაციონალური რიცხვი. ნამდვილი რიცხვი. ნამდვილი რიცხვის გამოსახვა რიცხვით წრფეზე. ნამდვილი რიცხვის მოდული

ამ პარაგრაფით ვამთავრებთ რიცხვთა სიმრავლეებისა და მათ შორის მიმართებების აღწერას. ამიტომ ირაციონალური რიცხვის ცნების შემოღებამდე გავიმეორეთ ნატურალურ, მთელ და რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეები, მათ შორის მიმართებები.

მნიშვნელოვანია, მოსწავლემ კარგად გაიაზროს კვადრატული ფესვისა და ამ ცნებასთან დაკავშირებული აღნიშვნები.

არსებობს ორი რიცხვი, რომლის კვადრატი არის 9; ეს რიცხვებია 3 და (-3); $3^2=9$, $(-3)^2=9$; თითოეული არის კვადრატული ფესვი 9-დან. ამ ორი რიცხვიდან ერთი დადებითი რიცხვია; ეს არის 3; ამ რიცხვს ეწოდება არითმეტიკული კვადრატული ფესვი 9-დან და ასე აღინიშნება: $\sqrt{9}$. ასეთი კონკრეტული მაგალითების განხილვის შემდეგ განვიხილავთ ტოლობას:

$$\sqrt{a^2}=|a|;$$

$\sqrt{a^2}$ არის არითმეტიკული კვადრატული ფესვი a^2-დან; მაშასადამე, ეს რიცხვი არის a, თუ a დადებითია; არის $(-a)$, თუ a უარყოფითია; არის 0, თუ $a=0$. მაშასადამე, $\sqrt{a^2}=|a|$, რადგან $|a|$-თი აღინიშნება a, თუ $a>0$; $(-a)$, თუ $-a>0$ $(a<0)$ და 0, თუ $a=0$.

აქვე განვიხილავთ ირაციონალური რიცხვის მაგალითებს; თუ a ნატურალური რიცხვია და არ არის მთელი რიცხვის კვადრატი, მაშინ $\sqrt{a}$ ირაციონალური რიცხვია.

თემის განხილვას ვამთავრებთ ნამდვილი რიცხვის მოდულისა და მოდულის თვისებების აღწერით.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

16 ამ დებულებას საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით ვამტკიცებთ; დავუშვათ α ირაციონალური რიცხვია, β — რაციონალური, მაშასადამე, β ასე ჩაიწერება: $\beta=\dfrac{m}{n}$ $(m\in \boldsymbol{Z},\ n\in \boldsymbol{N})$; თუ $\alpha+\beta$ რაციონალურია, ანუ თუ $\alpha+\dfrac{m}{n}=\dfrac{m_1}{n_1}$ $(m_1\in \boldsymbol{Z},\ n_1\in \boldsymbol{N})$, მაშინ $\alpha=\dfrac{m_1}{n_1}-\dfrac{m}{n}=\dfrac{m_1n-n_1m}{n_1n}$; მივიღეთ, რომ α რაციონალურია, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

19 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|$;

თუ $1\le x<2$, მაშინ $0\le x-1<1$, $\sqrt{x-1}<1$ და მივიღებთ:

$$|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=2.$$

თუ $x>2$, მაშინ $x-1>1$, $\sqrt{x-1}>1$ და

$$|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}.$$

21 დავუშვათ, კვადრატის გვერდი და დიაგონალი თანაზომადი მონაკვეთებია; მაშინ არსებობს მონაკვეთი, რომლის სიგრძე არის l, რომელიც თავსდება m-ჯერ კვადრატის გვერდში და n-ჯერ დიაგონალში; მაშასადამე, კვადრატის გვერდის სიგრძე გამოისახება ასე: ml; დიაგონალი — nl; $(nl)^2=(ml)^2+(ml)^2$; $n^2=2m^2$; $\dfrac{n^2}{m^2}=2$.

ჩვენ დამტკიცებული გვაქვს, რომ ეს ტოლობა შეუძლებელია. მაშასადამე, კვადრატის გვერდი და დიაგონალი არათანაზომადი მონაკვეთებია.

16 ნებისმიერი a და b ნატურალური რიცხვებისთვის $a+x=b$ განტოლება არ არის ამოხსნადი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, არც დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში — როცა $a \geq b$, მაშინ განტოლების ამონახსნი უარყოფითი მთელი რიცხვია, ან ნული. ეს განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი a და b ნატურალური რიცხვებისთვის მთელ რიცხვთა სიმრავლეში.

17 $\alpha+\beta$ და $\alpha-\beta$ რაციონალური რიცხვებია, მაშინ მათი ჯამი და სხვაობაც: 2α და 2β რაციონალური რიცხვებია; ე. ი. α და β რაციონალური რიცხვებია.

19 ყოველი ორი პერიოდული ათწილადი რაციონალური რიცხვია, მათი ნამრავლიც რაციონალური რიცხვია, ე. ი. ეს ნამრავლი არ შეიძლება იყოს არაპერიოდული ათწილადი.

20 თუ დავუშვებთ, რომ ეს რიცხვები რაციონალური რიცხვებია, მაშინ ჯამი რაციონალური რიცხვია, მაგრამ $2\sqrt{3}$ არ არის რაციონალური რიცხვი. არც ის შეიძლება, რომ ერთ-ერთი იყოს ირაციონალური, მეორე — რაციონალური, რადგან, თუ ერთ-ერთი რაციონალურია, მეორე ირაციონალური, მაშინ ნამრავლი ირაციონალური რიცხვი იქნება. ამ რიცხვების ნამრავლი კი 1-ის ტოლია.

დასამტკიცებელი დებულების საწინააღმდეგო დებულებაა: ერთ-ერთი რიცხვი მაინც რაციონალური რიცხვია.

ჩვენ დავამტკიცეთ მოცემული დებულების საწინააღმდეგოს მცდარობა, ე. ი. მოცემული დებულება ჭეშმარიტია.

თითოეული რიცხვის ირაციონალურობა შეიძლება ასეც დამტკიცდეს: ვთქვათ, მაგალითად, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ არ არის ირაციონალური, ანუ რაციონალურია. მაშინ რაციონალური იქნება მისი კვადრატიც $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6}=\frac{m}{n}\in\varnothing$. მივიღეთ, რომ რაციონალური იქნება $\sqrt{6}$ $\left(\sqrt{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-5\right)\right)$, რაც მცდარი დასკვნაა.

მოსწავლეებს შეიძლება შესთავაზოთ ამავე გზით დაამტკიცონ,რომ, მაგალითად: $\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $\sqrt{3}+\sqrt{10}$, $2\sqrt{7}-3\sqrt{6}$ ირაციონალური რიცხვებია.

4.4 კვადრატული ფესვის შემცველი გამოსახულების გარდაქმნა

კვადრატული ფესვის შემცველი გამოსახულების გარდაქმნა ეფუძნება კვადრატული ფესვის I, II და III თვისებებს. ერთ-ერთი თვისება ტექსტში დამტკიცებულია. სასურველია, გაკვეთილზე დამტკიცდეს სხვა თვისებებიც. ამ თვისებების გამოყენების მაგალითების განხილვის შემდეგ, მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ ამოცანების ამოხსნა. ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი იგივეობა არის: $\sqrt{a^2}=|a|$;

მაგალითად, $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}=\sqrt{7}-2$, რადგან $|2-\sqrt{7}|=\sqrt{7}-2$ (ამოცანა 3).

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

23 გ) $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{((\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5})((\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5})}=\frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{5+2\sqrt{6}-5}=\frac{6(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{6}}=$
$=\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}.$

26 გ) $\sqrt{a^{4n}b^{8n}}=a^{2n}b^{4n}.$

27 $\frac{\sqrt{2}-1}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+...+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}=$
$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+...+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\sqrt{n}-1.$

28 გ) $(x-1)^2=5,$
$|x-1|=\sqrt{5}$
$x-1=\sqrt{5},\ x-1=-\sqrt{5};$
$x=1+\sqrt{5},\ x=1-\sqrt{5}.$

29 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=72+2\cdot 18=72+36=108.$
$\sqrt{a}+\sqrt{b}=6\sqrt{3}.$

30 $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{\frac{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}{2}}=\sqrt{\frac{a+b+a-b+2\sqrt{a^2-b^2}}{2}}=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{2}}.$

21 ა) $-4\sqrt{\frac{1}{32}}=-\sqrt{\frac{16}{32}}=-\sqrt{\frac{1}{2}}.$

25 $\frac{\sqrt{2}-1}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+...+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{99}+\sqrt{100})(\sqrt{100}-\sqrt{99})}=$
$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+...+\sqrt{100}-\sqrt{99}=10-1=9.$

28 ბ) $\sqrt{12+\sqrt{63}}=\sqrt{\frac{24+2\sqrt{63}}{2}}=\sqrt{\frac{21+3+2\sqrt{21\cdot 3}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{21}+\sqrt{3})^2}{2}}=\frac{\sqrt{21}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$

საშინაო დავალების 28 ამოცანის შესრულებისას, მოსწავლეები ითვალისწინებენ კლასში ამოხსნილ 30 ამოცანის მითითებას.

4.5 n-ური ხარისხის ფესვი. რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი

ამ პარაგრაფის განხილვით მოსწავლეები გაიღრმავებენ ცოდნას n-ური ხარისხის ფესვის, რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის, მათზე მოქმედებებისა და მათი სხვადასხვა გამოყენების შესახებ.

ყურადღება გავამახვილოთ n-ური ხარისხის ფესვსა და არითმეტიკულ n-ური ხარისხის ფესვს შორის განსხვავებაზე. გულდასმით განვიხილოთ შემთხვევები, როცა n ლუწია და როცა n კენტია. როცა n კენტია, მაშინ n-ური ხარისხს ფესვს a ნამდვილი რიცხვიდან ერთი მნიშვნელობა აქვს; როცა n ლუწია, მაშინ n-ური ხარისხს ფესვს a დადებითი ნამდვილი რიცხვიდან აქვს ორი მნიშვნელობა: $\sqrt[n]{a}$ და $-\sqrt[n]{a}$. მათგან $\sqrt[n]{a}$ არის არითმეტიკული n-ური ხარისხის ფესვი. წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის განსაზღვრებისას გაამახვილეთ ყურადღება ხარისხის ფუძეზე. მრავალრიცხოვანი მაგალითებით წარმოდგენილია ხარისხისა და ფესვის თვისებები. პარაგრაფის ბოლოს მოცემულ კითხვებზე პასუხები და კლასში სამუშაოდ განკუთვნილი დავალებების განხილვა მოსწავლეს დაეხმარება საკითხის სიღრმისეულად გააზრებაში.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

6 მივაქციოთ ყურადღება, რომ, პირობით, $a-b<0$.
$\sqrt[4]{(a-b)^4}+a=b-a+a=b.$

14 $\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt[10]{x^9}=\sqrt[10]{x^6\cdot x^9}=\sqrt[10]{x^{15}}=x^{1,5}$

შეიძლება თანამამრავლები ჩავწეროთ რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხების სახით: $x^{\frac{3}{5}}\cdot x^{\frac{9}{10}}=x^{\frac{15}{10}}=x^{1,5}$.

16 ბ) $\sqrt[5]{32}<\sqrt[5]{42}<\sqrt[5]{243}$, საიდანაც $2<\sqrt[5]{42}<3$, $-3<\sqrt[5]{-42}<-2$.
გ) გავითვალისწინოთ, რომ $9^3<820<10^3$, მივიღებთ: $9<\sqrt[3]{820}<10$.

22 ა) შევადაროთ $12^{\frac{9}{6}}$ და $18^{\frac{4}{6}}$.
$12^9>10^9$, $18^4<20^4$, $10^9>20^4$ ე. ი. $12^{\frac{3}{2}}>18^{\frac{2}{3}}$
ბ) შევადაროთ $18^{\frac{3}{4}}$, და $12^{\frac{4}{3}}$, $18^{\frac{9}{12}}$ და $12^{\frac{16}{12}}$
$18^9>20^9=512\cdot10^9$, $12^{16}>10^{16}$, ე. ი. $18^{\frac{9}{12}}<12^{\frac{16}{12}}$,
საიდანაც $\left(\frac{1}{18}\right)^{\frac{3}{4}}>\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{4}{3}}$.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

შეფასების კრიტერიუმების გამოყენებით, მოსწავლეები შეძლებენ საკუთარი ნაშრომის შემოწმებას, აღმოაჩენენ ხარვეზებს. ამ ხარვეზების აღმოფხვრაზე მუშაობა შეიძლება დამატებითი ამოცანების გამოყენებით. მოსწავლეები გაეცნობიან ნაშრომთა შეფასების შედეგებსაც.

თვითშეფასების ამოცანები დაკავშირებულია სამიზნე ცნებებთან: სიდიდეები, რიცხვები, გეომეტრიული ობიექტები, ზომები, ალგებრული გამოსახულება, განტოლება, ფორმულა.

მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად:

1 გავითვალისწინოთ, რომ ორობით სისტემაში 1+1=10.

$$\begin{array}{r} (10011)_2 \\ +\ (10101)_2 \\ \hline (101000)_2 \end{array}$$

2 ბ) $3x^2+4x+3=98$ განტოლებიდან ვიპოვით x ნატურალურ რიცხვს, $x=5$.

3 ბ) $0{,}7(43)=\frac{743-7}{990}$.

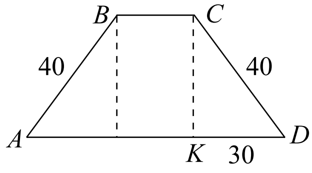
4 კვადრატის გვერდი — x; ღობის სიგრძე — $4x$; მეორე ნაკვეთის ერთ-ერთი გვერდის სიგრძე — $1{,}3x$, მეორე გვერდის სიგრძე — $2x-1{,}3x=0{,}7x$. ფართობების შეფარდებაა $\frac{x^2}{1{,}3x\cdot 0{,}7x}=\frac{100}{91}$.

5 $\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{1+6+2\sqrt{6}}+\sqrt{1+6-2\sqrt{6}}=\sqrt{6}+1+\sqrt{6}-1=2\sqrt{6}$.

6 $x^2-5=0,\ x=\pm\sqrt{5}$;
$x-\sqrt{7}=0,\ x=\sqrt{7}$.

7 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{ab}=45-2\cdot 18=9$; $\sqrt{a}-\sqrt{b}=3$ (გავითვალისწინეთ რომ $b<a$).

8



$BC=b$; $AD=a$;
$CK=20$;
$KD=20\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2}\cdot 20=800 \\ \frac{a-b}{2}=20\sqrt{3}, \end{cases}$$

საიდანაც $a=40+20\sqrt{3}$, $b=40-20\sqrt{3}$.

9 $\frac{\sqrt[8]{5}}{\sqrt[8]{1280}}=\sqrt[8]{\frac{1}{256}}=\frac{1}{2}$.

10 $\sqrt{8}^{-\frac{5}{6}}=2^{-\frac{15}{12}}$; $\sqrt[3]{8^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{8}}}=2^{-\frac{3}{3}}\cdot 2^{-\frac{3}{12}}=2^{-\frac{15}{12}}$; ტოლია.

შეაფასეთ თქვენი შედეგი.

1 ამოცანაში ორობითი სისტემის არსის ცოდნის გამომჟღავნებით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას, მითითებული ჯამის პოვნით — კიდევ 1,5 ქულას. ამოცანა 2 ქულიანია.

2 ამოცანის ა) და ბ) დავალებებში მოცემული რიცხვების თანრიგების მიხედვით წარმოდგენით დაიმსახურებთ თითო ქულას, x-ის პოვნით კი — კიდევ 0,5-0,5 ქულას. ამოცანა 3-ქულიანია.

3 ამოცანის ა) დავალების შესრულებით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას; ბ) დავალების შესრულებით — 1 ქულას. ამოცანა 1,5-ქულიანია.

4 ამოცანაში რაიმე უცნობის საშუალებით კვადრატის გვერდის, მისი პერიმეტრისა და მართკუთხედის მითითებული გვერდის გამოსახვით დაიმსახურებთ 1 ქულას, მეორე გვერდის გამოსახვით — კიდევ 1 ქულას, კვადრატისა და მართკუთხედის ფართობების ჩაწერით — კიდევ 1 ქულას, შეფარდების პოვნით — კიდევ 0,5 ქულას. ამოცანა 3,5 ქულიანია.

5 ამოცანაში მიახლოებითი მნიშვნელობის კალკულატორის გამოყენებით გამოთვლისას დაიმსახურებთ მხოლოდ 0,5 ქულას. მოცემული გამოსახულების მნიშვნელობის კვადრატში აყვანით, ან სხვა რაიმე გზით გარდაქმნისას და საძიებელი მნიშვნელობის დადგენისას დაიმსახურებთ 2,5 ქულას.

6 ამოცანაში განტოლების ყველა ფესვს შორის ირაციონალური რიცხვების გამოყოფით დაიმსახურებთ 1,5 ქულას.

7 ამოცანაში საძიებელი სხვაობის პოვნის მიზნით მისი კვადრატის შესწავლა და განხილვის შედეგით დასრულება, ან სხვა რაიმე გზით ამ შედეგის მიღწევა, შეფასდება 2 ქულით.

8 ამოცანაში ტრაპეციის სიმაღლის პოვნით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას, დიდ ფუძეზე ფერდის გეგმილის პოვნით — კიდევ 0,5 ქულას, ტრაპეციის ერთ-ერთი ფუძის პოვნით — კიდევ 1 ქულას, მეორე ფუძის პოვნით — კიდევ 0,5 ქულას. ამოცანა 2,5-ქულიანია.

9 თითოეული დავალების სწორი შესრულება. შეფასდეს 1 ქულით, მცირე ხარვეზის შემთხვევაში 0,5 ქულით. ამოცანა 2-ქულიანია.

10 გამოსახულების ერთი და იმავე ფუძიანი ხარისხის სახით წარმოდგენა — 1+1 ქულა, შედარება — კიდევ 0,5 ქულა. ამოცანა 2,5-ქულიანია.

რამდენი ქულა მიიღეთ?

21-23 ქულა — დავალება შესრულებულია ძალიან კარგად (შეფასება მაღალია);
17-20 ქულა — დავალება შესრულებულია კარგად (შეფასება საშუალოზე მაღალია);
12-16 ქულა — დავალება შესრულებულია ნაწილობრივ (შეფასება საშუალოა);
12-ზე ნაკლები ქულის შემთხვევაში გჭირდებათ უფრო გულმოდგინე მუშაობა (შეფასება დაბალია).

IV თავის კომპლექსური დავალება

ეს კომპლექსური დავალება ეხმიანება საგანმანათლებლო სტანდარტის მიმართულებას: რიცხვები და მოქმედებები. სამიზნე ცნებებია: სიდიდეები, რიცხვი, მათი თვისებები, რიცხვითი გამოთვლები.

დავალება ეძღვნება მათემატიკის ფუნდამენტური საკითხის — რიცხვის ჩაწერის პოზიციური სისტემის არსის სიღრმისეულ განხილვას და მის გამოყენებებს, მოსწავლეებისთვის კარგად ცნობილი ათობითი სისტემის შესახებ წარმოდგენების გაფართოებასა და გაღრმავებას. დიდია ამ დავალების ზოგადი განმავითარებელი მნიშვნელობაც.

მოსწავლეებმა ნაშრომებში მკაფიოდ უნდა აღწერონ ათობითი სისტემის სტრუქტურა, მისი პოზიციურობა; დაასახელონ სისტემაში გამოყენებული ციფრები; ამ სისტემაში რიცხვთა ჩაწერის წესი; ხაზი უნდა გაესვას რიცხვის ჩაწერის ერთადერთობასაც.

10-ობითი სისტემის სრული აღწერის შემდგომ უნდა ბუნებრივად დაისვას კითხვა რიცხვთა სხვა პოზიციური სისტემებით ჩაწერის შესახებ. კერძოდ, უნდა აღწერონ, რა ცვლილებების შეტანა მოუწევთ იმ შემთხვევაში, როცა სისტემის ფუძე 10-ზე მეტი ნატურალური რიცხვია, როგორ გადაჭრიან ახალი „ციფრების“ შემოტანის საკითხს.

ნაშრომში უნდა ჩანდეს რიცხვის რაიმე პოზიციურ სისტემაში ჩაწერისას სათანადო ციფრთა (რიცხვის ჩანაწერის) დადგენის წესი; წარმოდგენილი უნდა იყოს საილუსტრაციო მაგალითები.

გამორჩეული ყურადღება უნდა დაეთმოს ორობით სისტემას მისი უაღრესად დიდი მნიშვნელობის გამო, აიხსნას მისი ასეთი აქტუალურობა. ორობითი სისტემის მარტივი კავშირის დემონსტრირება ოთხობით და რვაობით სისტემებთან კიდევ უფრო გაამდიდრებს ნაშრომის ხარისხს. რამდენიმე მაგალითით უნდა წარმოადგინონ ასეთი გადაყვანის პროცედურები, ათობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვის ორობითში გადაყვანის მაგალითებიც.

მოსწავლეებმა ისარგებლონ სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი სამობითი სისტემის გამოყენების საინტერესო მაგალითით — ერთი პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნით. საუბარია მთელი რიცხვით გამოსახული რაიმე საწონის მასის დადგენაზე ულლიანი სასწორით, როცა დასაშვებია სასწორის ორივე პინაზე საწონების განთავსება. აქვეა კიდევ ერთი ამოცანა საგნის მასის დადგენის შესახებ არასტანდარტული სისტემით.

არ არის გამორიცხული (მისასალმებელიცაა!) მოსწავლეებმა მოიძიონ საინტერესო ინფორმაცია სხვა არასტანდარტული სისტემების შესახებ. ეს ინფორმაცია ყურადღებითაა განსახილველი. მაგალითად, შესაძლებელია დასახელდეს ფიბონაჩის რიცხვების

გამოყენებით რიცხვთა ჩაწერის შესაძლებლობა. აქ წამოიჭრება ჩაწერის ერთადერთობის საკითხი.

ნაშრომს სისრულეს შემატებს მოკლე ისტორიული ექსკურსიც — გზა თვლის უძველესი არაპოზიციური და პოზიციური სისტემებიდან დღეს გამოყენებულ სისტემებამდე. გამორჩეული ადგილი უნდა დაეთმოს საქართველოში ათობითი სისტემის შემოღებამდე არსებულ თვლის სისტემას, მასში გამოყენებულ ნიშნებს, ამ სისტემის რიცხვთა ჩანაწერის ნიმუშებს.

პრეზენტაციისას მნიშვნელოვანია განხილვაში მთელი კლასის ჩართულობა. მოხსენების შინაარსი უნდა შეივსოს ყველა მოსწავლის მოხსენებათა მიხედვითაც. თქვენი ჩართულობა განხილვის პროცესში, კომენტარები და მითითებები შექმნის ამ აქტივობის შემაჯამებელ უარლესად მნიშვნელოვან განმავითარებელ შეფასებას.

IV თავის დამატებითი ამოცანები

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

1 ბ) $(x+1)_2=(10000)_2$;

$x=10000_2-1_2$;

$x=(1111)_2$, მართლაც $(1111)_2+(1)_2=10000_2$

2 $(2y3)_x=39$, $2x^2+yx+3=39$;

$(132)_x=30$, $x^2+3x+2=30$.

$x^2+3x-28=0$, $x=4$;

$32+4y+3=39$, $4y=4$, $y=1$.

9 თუ $m<n$, მაშინ

$\sqrt{(m-n)^2}=|m-n|=n-m$.

10 გ) $11\le b+a\le 13$,

$a<0$,

$\sqrt{(b+a)^2}+\sqrt{a^2}=b+a-a=b$.

14 $\dfrac{14}{3\sqrt{2}-2}=\dfrac{14(3\sqrt{2}+2)}{18-4}=3\sqrt{2}+2$,

$P=(3\sqrt{2}-2+3\sqrt{2}+2)\cdot 2=12\sqrt{2}$ (სმ)

15 ბ) $\dfrac{8}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}-\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{8(\sqrt{3}-1)}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-2}{1}-\dfrac{7+4\sqrt{3}}{-1}=4\sqrt{3}-4+\sqrt{5}-2+7+4\sqrt{3}=8\sqrt{3}+\sqrt{5}+1$.

18 $3^5>5^3$, ამიტომ $\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}$, $-\sqrt[3]{3}<-\sqrt[5]{5}$, $\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}<\sqrt{9}-\sqrt[5]{5}$.

შემაჯამებელი წერა №5

თემა: ათობითი და არაათობითი პოზიციური სისტემები, ნამდვილი რიცხვები; ალგებრულ გამოსახულებათა გარდაქმნები; რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი.

სამიზნე ცნებები: რიცხვები (რიცხვითი სისტემები, ნამდვილი რიცხვები), რიცხვითი გამოთვლები, ალგებრული გამოსახულება, განტოლება.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს რიცხვის ათობითი და არაათობითი პოზიციური სისტემების გააზრება და ამ სისტემებს შორის კავშირის წარმოჩენა, მოქმედებები ამ სისტემებში ჩაწერილ რიცხვებზე; სიდიდეების წარმოდგენა რიცხვებით, რიცხვითი გამოსახულებების გარდაქმნა (მათ. საშ. 1); სხვადასხვა ტიპის პრობლემათა გადაჭრა (მათ. საშ. 2).

ამოცანების ნიმუშები

1) ჩაწერეთ ათობით სისტემაში: 204_5; 3301_4; 110111_2; 401_8.

2) შეკრიბეთ მოცემულ სისტემაში:
ა) 2_3+2_3; ბ) 1_2+1_2; გ) 7_8+6_8; დ) 1_8+7_8.

3) შეასრულეთ მოქმედებები იმავე სისტემაში, რომელშიც რიცხვებია წარმოდგენილი:
ა) $1706_{10}+2513_{10}$; ბ) 1706_8+2513_8; გ) $(11_2+10_2)^2$.

4) იპოვეთ სისტემის ფუძე მოცემული ტოლობის მიხედვით:
ა) $2001_x=129_{10}$; ბ) $321_x=86_{10}$.

5) მზიამ თავისი დანაზოგის 12% მოხუცებულთა სახლის სასარგებლოდ გადარიცხა და დარჩა 1320 ლარი. რამდენი ლარი იყო მზიას დანაზოგი?

6) გაამარტივეთ გამოსახულება და გამოთვალეთ მისი რიცხვითი მნიშვნელობა, როცა $a=\sqrt{5}+2$; პასუხი ჩაწერეთ ისე, რომ წილადის მნიშვნელი ფესვს არ შეიცავდეს:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a}-2a\right)\left(\frac{1}{2a+1}-\frac{1}{2a-1}\right).$$

7) გაამარტივეთ გამოსახულება და იპოვეთ მისი რიცხვითი მნიშვნელობა, როცა $x=90$; $\dfrac{2x-2\sqrt{10x}}{x+10-2\sqrt{10x}}$.

8 ამოხსენით განტოლება: $2(\sqrt{x}-1)=3-\sqrt{x}$.

9 წარმოადგინეთ 2-ის ხარისხის სახით: $\sqrt[3]{\frac{1}{32}}\cdot\left(\frac{1}{256}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

პასუხები: **1** 54; 241; 55; 257. **2** ა) 11_3; ბ) 10_2; გ) 15_8; დ) 10_8. **3** ა) 4219_{10}; ბ) 4421_8; გ) 11001_2. **4** ა) $x=4$; ბ) $x=5$; **5** 1500 ლარი. **6** $\frac{\sqrt{5}-2}{3}$. **7** 3. **8** $x=2\frac{7}{9}$. **9** $2^{\frac{13}{3}}$.

მითითებები:

1 $401_8=4\cdot8^2+1$.

3 გავითვალისწინოთ, რომ რვაობით სისტემაში $6_8+3_8=11_8$, $7_8+5_8=14_8$. ხოლო ორობით სისტემაში $11_2+10_2=101_2$ და

$$\begin{array}{r} \times\ 101_2 \\ 101_2 \\ \hline 101_2 \\ 101_2 \\ \hline 11001_2 \end{array}$$

4 ა) $2x^3+1=129$, $x=4$; ბ) $3x^2+2x+1=86$, $x=5$.

5 1320 ლარი არის მზიას დანაზოგის 88%, მზიას დანაზოგი იყო $\frac{1320\cdot100}{88}=1500$ ლარი.

6 გამოსახულების გამარტივების შემდეგ მივიღებთ $\frac{1}{3a}$-ს; $\frac{1}{3(\sqrt{5}+2)}=\frac{\sqrt{5}-2}{3(5-4)}=\frac{\sqrt{5}-2}{3}$.

7 $\frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{10})}{(\sqrt{x}-\sqrt{10})^2}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{90}}{\sqrt{90}-\sqrt{10}}=3$.

8 $\sqrt{x}=\frac{5}{3}, x=\frac{25}{9}$.

9 $\sqrt[3]{\frac{1}{32}}\cdot\left(\frac{1}{256}\right)^{-\frac{3}{4}}=2^{-\frac{5}{3}}\cdot2^6=2^{\frac{13}{3}}$.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

1 ყოველი რიცხვის გადაყვანა ათობით სისტემაში შეფასდეს 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

2 ამოცანის ოთხი დავალებიდან თითოეულის შესრულება შეფასდეს 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

3 ამოცანის სამი დავალებიდან თითოეულის შესრულება შეფასდეს თითო ქულით. სულ — 3 ქულა.

4 ამოცანის ორი დავალებიდან თითოეულში განტოლების შედგენა შეფასდეს 0,5 ქულით, მისი ამოხსნა და ამოცანის პასუხის წარმოდგენა — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

5 1 ქულით შეფასდეს იმის დაფიქსირება, რომ 1320 ლარი არის დანაზოგის 88%, დანაზოგის გამოთვლა — კიდევ 1 ქულით. სულ — 2 ქულა. ამოცანის ამოხსნა განტოლების შედგენის გზით ასევე შეფასდეს 2 ქულით.

6 გამოსახულების გამარტივება (მიყვანა $\frac{1}{3a}$ გამოსახულებამდე) შეფასდეს 2 ქულით. მისი რიცხვითი მნიშვნელობის ჩაწერა ისე, რომ მნიშვნელი არ შეიცავდეს ფესვის ნიშანს — კიდევ 1 ქულით. სულ — 3 ქულა.

7 გამოსახულების გამარტივება შეფასდეს 1 ქულით, x-ის მნიშვნელობის ჩასმა და მიღებული რიცხვითი გამოსახულების გამარტივება — კიდევ 1 ქულით. სულ 2 ქულა. მოცემული გამოსახულების გამარტივების გარეშე მისი მნიშვნელობის პოვნის ცდები შეფასდეს არაუმეტეს 1 ქულით.

8 $\sqrt{x}$-ის გამოთვლა შეფასდეს 1 ქულით, კიდევ 1 ქულით შეფასდეს განტოლების ფესვის პოვნა. სულ — 2 ქულა.

9 თითოეული თანამამრავლის წარმოდგენა 2-ის ხარისხის სახით შეფასდეს1 ქულით, პასუხის დაფიქსირება კიდევ 1 ქულით. სულ — 2 ქულა.

10-ქულიანი შეფასებისას მოსწავლის მიერ მიღებული ქულების ჯამი გაიყოს 2-ზე და შედეგი დამრგვალდეს ერთეულის სიზუსტით.

მეთერთმეტეკლასელთათვის დგება მნიშვნელოვანი ეტაპი — დასასრულს უახლოვდება სასწავლო წელი. თქვენ გიწევთ, შეაფასოთ მოსწავლეთა მიერ მიღებული ცოდნის დონე, მისი გამოყენების უნარები. ამ საკითხს ემსახურება დასკვნითი თვითშეფასების, შემაჯამებელი წერის და დამატებით ამოცანებზე მუშაობა. მიღებული ინფორმაციის საფუძველზე მასწავლებელს ექმნება შესაძლებლობა გააანალიზოს მიღებული შედეგები, მეტი სიცხადე შეიტანოს მოსწავლეთა მიერ სამიზნე ცნებათა და სათანადო მკვიდრი წარმოდგენების არსის ათვისების საკითში, აღმოფხვრას შენიშნული ხარვეზები და შეიტანოს საჭირო კორექცია თავის მუშაობაში. ამაში მასწავლებელს დიდ დახმარებას გაუწევს განმავითარებელი შეფასებების ორგანიზება ყოველი სასწავლო აქტივობის პარალელურად, ან ამ აქტივობათა შემდეგ.

წარმოგიდგენთ ზოგიერთ რეკომენდაციას ბოლო შემაჯამებელი წერის შემდეგ ჩასატარებელი განმავითარებელი შეფასების ჩატარების ფორმისა და შინაარსის შესახებ. ამ

რეკომენდაციებს თქვენ, ცხადია, დააკონკრეტებთ და გააღრმავებთ თქვენი მოსწავლეების ინდივიდუალურ ფაქტორთა გათვალისწინებით. ერთადერთ რჩევას კი დაბეჯითებით შემოგთავაზებთ — საკითხები განიხილეთ ინტერაქტიულად, მოსწავლეთათვის მისაღები ფორმით, მთელი კლასის შემოქმედებითი ჩართულობით, გამოყენებითი ასპექტების ხაზგასმით, მათი მოსაზრებებისა და შენიშვნებისადმი ყურადღებიანი დამოკიდებულებით.

(1) ამოცანის განხილვამდე მოსწავლეებთან ერთად აღწერეთ ათობითი და არაათობითი პოზიციური სისტემების არსი. მოსწავლეებმა უნდა მკაფიოდ აღიქვან, რომ არავითარი თეორიული ხასიათის უპირატესობა არ აქვს რომელიმე ასეთ სისტემას სხვა ანალოგიურ სისტემასთან შედარებით. შეეცადეთ, რომ ჩატარდეს ასეთი სისტემების შედარებითი ანალიზი, ისაუბრონ ამა თუ იმ სისტემის პრაქტიკული გამოყენების უპირატესობაზე; განიხილეთ საილუსტრაციო ნიმუშები და შემდეგ თავად ამ ამოცანის დავალებები მოსწავლეებს მიანდეთ განსახილველად. ყოველ კონკრეტულ სისტემაში ყურადღება მიაქციეთ თანრიგებს — როგორ წარმოიდგინება ისინი სისტემის ფუძის მიხედვით.

(2) ამოცანის განხილვა, მას შემდეგ რაც წინა ამოცანა საჯაროდ, ინტერაქტიულად იყო განხილული, აღარ იქნება მოსწავლეთათვის რთული. მთავარ აქცენტს კვლავ თანრიგების სტრუქტურაზე ვაკეთებთ. მოსწავლეებთან ერთად გაავლეთ პარალელელბი ათობით და არაათობით სისტემებში რიცხვთა შეკრებას შორის.

(3) ამოცანაში ათობით სისტემაში შეკრებისა და გამრავლების (ახარისხების) კარგად ცნობილი თვისებები ვრცელდება ფაქტობრივად ნებისმიერფუძიან პოზიციურ სისტემაში, კერძოდ, „ქვეშმიწერით" შეკრებისა და „სვეტში" გამრავლების მოქმედებებზე. მიმართეთ მოსწავლეებს, თავად წარმოადგინონ ასეთი გამრავლების ნიმუშები და თავადვე შეასრულონ მოქმედებები.

(4) ამოცანის განხილვისას არაა გამორიცხული, რომ ზოგიერთმა მოსწავლემ სინჯვის მეთოდი გამოიყენოს და ამ გზით მიაგნოს სისტემის ფუძეს. ცხადია, ეს მიდგომაც არაა გამოსარიცხი, თუმცა, შესაძლოა, ეს ზოგჯერ ისეთ შრომატევად გამოთვლებთან იყოს დაკავშირებული, რომ არასასურველი იყოს მისი გამოყენება. ამიტომ სჯობს „მძლავრ", ეფექტიან მეთოდს მივანიჭოთ უპირატესობა — x-ის ძიებას განტოლების საშუალებით. მიღებული განტოლებები იმდენად მარტივია, რომ მათ ფესვებს იოლად იპოვიან მოსწავლეები.

(5) ამოცანის ამოხსნამდე საჯაროდ განიხილეთ — გაიხსენეთ რიცხვის პროცენტის არსი. ამოცანის ამოხსნის გზის ძიებისას შეიძლება გაიყოს მოსწავლეთა მოსაზრებები. თუ ზოგიერთები მიხვდებიან, რომ მითითებული თანხა წარმოადგენს საწყისი თანხის 88%-ს და ამის მიხედვით აღადგენენ საწყის თანხას, ცხადია, ეს საუკეთესო მიდგომაა, თუმცა არც ის გზაა დასაწუნი, როცა საწყისი თანხის მიმართ შედგება განტოლება და ამ გზით ვიპოვით ამ თანხას.

(6) ამოცანაში საბოლოო შედეგის მიღწევას ზოგიერთი მოსწავლე მოცემული გამოსახულების გამარტივების გარეშე, რთული გამოთვლების გზით შეეცდება. ეს არ პასუხობს ამოცანის პირობაში მითითებულ მოთხოვნას. ალგებრული გამოსახულება ერთ-ერთ მნიშვნელოვან სამიზნე ცნებას წარმოადგენს და მისი გარდაქმნების ცოდ-

ნა აქტუალურია, აქვს მნიშვნელოვანი გამოყენებითი ასპექტი. მეორე ეტაპი უშუალოდ რადიკალებთან დაკავშირებულ გარდაქმნებს უკავშირდება. სახელმძღვანელოში მრავლადაა ასეთი ტიპის ამოცანები და კიდევ ერთხელ ამაზე ხაზგასმა გააუმჯობესებს მოსწავლეების ცოდნას.

7 ამოცანის ამოხსნისას წამოიჭრება იგივე პრობლემა, რომელზეც წინა ამოცანის განხილვის დროს ვისაუბრეთ. ფაქტობრივად, არაერთი სასწავლო წლის პროგრამა უკავშირდება ალგებრულ გამოსახულებებს, მათ გარდაქმნას. ამიტომ, „უცხოდ“ არ იღებს მას მოსწავლე, თუმცა მუდმივი განახლება და გაღრმავება სჭირდება ამ ცოდნას. ამჯერად, მოსწავლემ უნდა შენიშნოს, რომ გამოსახულების მნიშვნელი სრული კვადრატის სახით უნდა ჩაიწეროს. ამის მიკვლევას შესაძლოა მთელი კლასის ძალისხმევა დასჭირდეს, შესაძლოა — თქვენი ზოგიერთი მინიშნებაც. სათანადო გამარტივების გარეშე, თავიდანვე რიცხვითი მნიშვნელობების ძიებაზე გადასვლა, დაარღვევს ამოცანის პირობას. თუმცა, გარკვეულ დადებით ნაბიჯად მაინც უნდა ჩაუთვალოთ მოსწავლეს.

8 ამ ამოცანის ამოხსნისას მოსწავლეს მოუწევს მარტივი გარდაქმნების შესრულება და ფესვის თვისების გამოყენება.

9 დავალების შესრულება რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის, რიცხვების ჩაწერის სხვადასხვა ფორმის ცოდნასთან არის დაკავშირებული.

მოსწავლეთა მოსაზრებების განხილვა ამ შემაჯამებელი წერის დავალებათა და განმავითარებელი შეფასების შესახებ, მდიდარ ინფორმაციას მოგაწვდით მოსწავლეთა აკადემიური მზაობის შესახებ, აღმოჩენილი ხარვეზების აღმოფხვრის გზების შესახებ. ამ ინფორმაციის მიხედვით თქვენ შეძლებთ მოსწავლეთა აკადემიური დონეების დადგენას სოლო ტაქსონომიის ზოგადი ფორმით წარმოდგენილი დონეების მიხედვით.

1. პრესტრუქტურული დონე. მოსწავლეს აქვს არამკაფიო წარმოდგენები სამიზნე ცნებებსა და სათანადო მკვიდრ წარმოდგენებზე; ვერ აღწერს რიცხვთა პოზიციური სისტემის არსს; ვერ ახერხებს გამოსახულებათა გარდაქმნას; მისი მოსაზრებები გეომეტრიული ობიექტებისა და მათი ზომების დადგენის შესახებ არ არის სარწმუნო.

2. უნისტრუქტურული დონე. მოსწავლე კარგად იცნობს ათობითი პოზიციური სისტემის არსს, შეუძლია ამ სისტემაში რიცხვებზე მოქმედებათა შესრულება, თუმცა ამ თეორიის სხვა პოზიციურ სისტემებზე გავრცელება უჭირს; შეუძლია მარტივი გარდაქმნებით ოპერირება ალგებრულ გამოსახულებებზე, მარტივი განტოლებების ამოხსნა; ხსნის უმარტივეს გეომეტრიულ ამოცანებს, თუმცა უჭირს ხოლმე ობიექტთა შორის დამოკიდებულებების დადგენა და საჭირო ფორმულების მოხმობა.

3. მულტისტრუქტურული დონე. მოსწავლე კარგად აღწერს რიცხვთა არაერთ პოზიციურ სისტემას, თუმცა უჭირს ამ სისტემების სტრუქტურის ზოგადად, მკაფიოდ

ჩამოყალიბება და აღწერა; კარგად აღწერს რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეებს; ასრულებს ალგებრულ გამოსახულებათა გარდაქმნებს; ხსნის არართულ გეომეტრიულ ამოცანებს, იყენებს სათანადო თეორიას, თუმცა უჭირს ჩატარებული მსჯელობის მრავალმხრივი ანალიზი, სხვადასხვა მეთოდის გამოყენება.

4. მიმართებითი დონე. კარგად აქვს აღქმული რიცხვთა პოზიციური სისტემების აგების ზოგადი პრინციპი, ადარებს ამ სისტემებს, მკაფიოდ, დასტრუქტურებულად აღწერს ამ თეორიის არსს და იყენებს კიდეც მას სთანადო ამოცანების ამოხსნისას; გეომეტრიული ამოცანების კვლევისას იყენებს სათანადო კავშირებს ობიექტებს შორის. საკითხებს გადმოსცემს ნათლად და მისაწვდომად.

5. გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. მოსწავლეს შეუძლია საინტერესო ამოცანათა დასმა და გადაჭრა რიცხვთა ნებისმიერ პოზიციურ სისტემაში, იყენებს კვლევის სხვადასხვა მეთოდს, ალგებრულ გამოსახულებათა გარდაქმნებისას აქვს არასტანდარტული, ეფექტიანი მიდგომები; გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას შეუძლია ამოხსნის ოპტიმალური გზის მოძიება, სხვადასხვა მეთოდის გამოყენება; ხშირად ახერხებს დასმული ამოცანის განზოგადებას და ასახელებს მისი ამოხსნის გზას; კრიტიკულად აანალიზებს წამოჭრილ მოსაზრებებს და თავად იძლევა მათზე ამომწურავ პასუხს. მისი მსჯელობა არის მკაფიო, მეცნიერულად გამართული და ფორმით დახვეწილი.

V თავი
მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

<table>
<tr><td colspan="4">თემები: მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები.

საათების სავარაუდო რაოდენობა: 20 სთ.

თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები, გრაფიკები.</td></tr>
<tr><td>სამიზნე ცნება და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</td><td>საკითხები</td><td>საკვანძო შეკითხვები</td><td>კომპლექსური დავალება</td></tr>
<tr><td>შესაბამისობა, ფუნქცია, ფუნქციის თვისებები, შექცეული ფუნქცია; ბუნებაში მიმდინარე მოვლენები შეიძლება აღიწეროს მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციებით; საბანკო საქმეში გამოიყენება მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები.</td><td>ლოგარითმი, ლოგარითმის თვისებები, ძირითადი ლოგარითმული იგივეობა; მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების გამოყენება.</td><td>რა პროცესები შეიძლება აღიწეროს მაჩვენებლიანი ფუნქციის გამოყენებით? რა გამოყენება აქვს ლოგარითმებს გამოთვლების ჩატარების პროცესში?</td><td>მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები და მათი ზოგიერთი გამოყენება.</td></tr>
<tr><td colspan="4">შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს შესასწავლი მოვლენიდან გამომდინარე ცვლად ან მუდმივ სიდიდეთა შორის ფუნქციური კავშირის დამყარება, წარმოდგენა სხვადასხვა ფორმით, ფუნქციის (ლოგარითმული, მაჩვენებლიანი) გამოყენება სხვადასხვა კონტექსტში ცვლილებათა აღსაწერად და რეალური მოვლენების მოდელირებისთვის (მათ. საშ. 3).</td></tr>
</table>

მე-5 თავი, ძირითადად, მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების შესწავლას ეთმობა.

ეს თემა ყოველთვის შედიოდა სასკოლო კურსში. თუმცა, ახალმა მიდგომამ, მათემატიკის გამოყენებით ასპექტებზე ყურადღების გამახვილებამ გვიბიძგა, რომ საკითხები ახლებურად გადმოგვეცა — ვიწყებთ პრაქტიკული ამოცანებით და ვამთავრებთ ამ გამოყენებების უფრო ფართო გადმოცემით. ეს მომენტი შემაჯამებელ-კომპლექსურ დავა-

ლებაშიც არის გათვალისწინებული. ამასთანავე, ფორმალურ სიზუსტეებს (მაგალითად, ნამდვილმაჩვენებლიანი ხარისხის განხილვისას) ნაკლებ ყურადღებას ვაქცევთ. წინა პლანზე გეომეტრიული წარმოდგენები (გრაფიკები) და ინდუქციური განზოგადებებია.

განვიხილავთ რა 2-ის ხარისხს მთელი და წილადი მაჩვენებლებით, ვაცხადებთ 2-ის ხარისხის არსებობას ნებისმიერი ნამდვილი მაჩვენებლით, ანუ მაჩვენებლიანი ფუნქციის (2^x ფუნქციის) არსებობას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე; ამასთანავე, ეს კეთდება გეომეტრიულ წარმოდგენებზე (გრაფიკებზე) დაყრდნობით. ჩამოყალიბებულია და ილუსტრირებულია ხარისხის თვისებები (გრაფიკებზე დაყრდნობით).

ახალი სტანდარტის შესაბამისად, სპეციალური პარაგრაფია გამოყოფილი მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული განტოლებებისა და უტოლობების განსახილველად. ეს თემები ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ფუნქციების თვისებებს უკავშირდება.

5.1 მაჩვენებლიანი ფუნქცია

მაჩვენებლიანი ფუნქციის შესწავლა იმ პროცესების განხილვით მიმდინარეობს, რომლებიც ამ ფუნქციით აღიწერება.

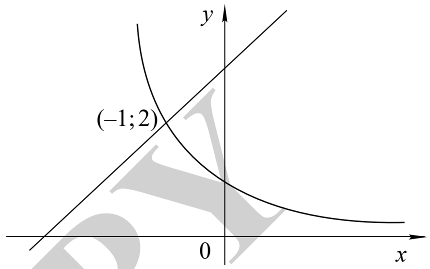
განვიხილეთ ბანკში ვადიან ანაბარზე სარგებლის დარიცხვის ორი ფორმა — წლიური მარტივი პროცენტისა და რთული პროცენტის დარიცხვა. საკითხები ნაცნობია მოსწავლეებისთვის და მათი გახსენება მაჩვენებლიანი ფუნქციის შესასწავლად საჭირო წინარე ცოდნის გააქტიურებას ემსახურება. დარიცხვის თითოეული წესი ფორმულებით აღვწერეთ — წლიური მარტივი პროცენტის დარიცხვის წესი მოიცემა $P_n=P+Prn$ ფორმულით, სადაც P საწყისი თანხაა, r — წლიური საპროცენტო განაკვეთი — საწყისი თანხის ის ნაწილი, რომელიც დაემატება საწყის თანხას; n — ხელშეკრულების დადების მომენტიდან განვლილი წლების რაოდენობა, P_n არის — n წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა.

რთული პროცენტის დარიცხვის წესი მოიცემა $P_n=P(1+r)^n$ ფორმულით, ($n\in\boldsymbol{N}$). შეიძლება ითქვას, რომ მარტივი პროცენტის დარიცხვის შემთხვევაში, თანხა იზრდება არითმეტიკული პროგრესიის წესით და აღიწერება წრფივი ფუნქციით; რთული პროცენტის დარიცხვის შემთხვევაში თანხა იზრდება გეომეტრიული პროგრესიის წესით და აღიწერება $y=Pa^x$ სახის ფუნქციით — მაჩვენებლიანი ფუნქციით.

განხილულია მაჩვენებლიანი ფუნქციის რამდენიმე შემთხვევა და, ამ განხილვის საფუძველზე, ჩამოყალიბებულია მაჩვენებლიანი ფუნქციის რამდენიმე თვისება: 1. განსაზღვრის არე ნამდვილ რიცხვთა $\boldsymbol{R}$ სიმრავლეა; 2. მნიშვნელობათა სიმრავლე — დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. 3. $y=a^x$ ფუნქცია ზრდადია, როცა $a>1$, კლებადია, როცა $0<a<1$.

ამოცანები, რომელთა შესრულება ცოდნის განმტკიცებას ემსახურება, ისეა განაწილებული, რომ საშინაო დავალების შესრულების დროს მოსწავლეებს არ შეხვდებათ სიძნელეები. საკონტროლო კითხვებზე და „ტესტებზე“ პასუხების შერჩევა, თეორიული მასალის ცოდნის გამოყენებით, ადვილად მოხერხდება.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:



12 ა) ავაგოთ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ და $y=x+3$ ფუნქციების გრაფიკები და ვიპოვოთ მათი გადაკვეთის წერტილის აბსცისა. შეიძლება მოსწავლეებმა გრაფიკების ასაგებად, ზოგჯერ გამოიყენონ რომელიმე კომპიუტერული რესურსიც. მაგალითად, Desmos, Geogebra,…

გადაკვეთის წერტილია $(-1;\ 2)$, განტოლების ფესვია $x=-1$.

13 ა) $\sqrt{5}>1$, ამიტომ $m>n$; გ) $\sqrt{5}-1>1$, ამიტომ $m<n$;

დ) $(\sqrt{2}+1)^{-n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}\right)^n=(\sqrt{2}-1)^n$, $0<\sqrt{2}-1<1$, ამიტომ $m>n$;

ე) $(\sqrt{5}+2)^{-n}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{5}-2}{5-4}\right)^n=(\sqrt{5}-1)^n$, $0<\sqrt{5}-2<1$ ამიტომ $m>n$.

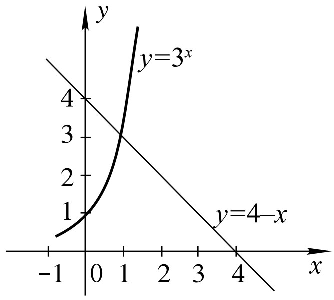
14 ა) $\sqrt{3}<\sqrt{5}$, ამიტომ $a>1$.

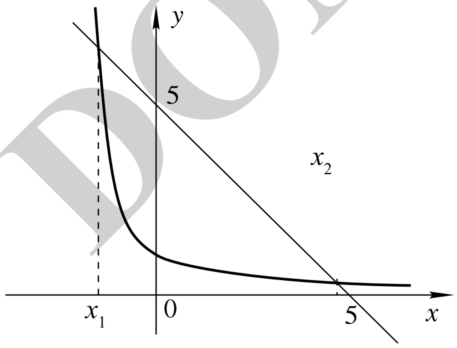
15 $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$, მნიშვნელობათა სიმრავლეა: $(-\infty;\ 0)$; ვ) $5^x>0$; $5^x+2>2$, ამიტომ $y=5^x+2$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა: $(2;\ +\infty)$.

16 დ) $\sqrt{(x^m+y^m)^2-(4^{\frac{1}{m}}xy)^m}=\sqrt{x^{2m}+2x^my^m+y^{2m}-4x^my^m}=\sqrt{x^{2m}-2x^my^m+y^{2m}}=|x^m-y^m|$.

17 დ) $3^x=4-x$;

განტოლებას ერთი ფესვი აქვს და ეს ფესვი დადებითია.





ზ) $4^{-x}+1=6-x$, განტოლება ასე გადავწეროთ: $\left(\frac{1}{4}\right)^x=5-x$.

ამ განტოლებას აქვს ორი ფესვი: x_1 და x_2, $x_1<0$, $x_2>0$.

18 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$; არც ლუწია და არც კენტია — $y(-x)=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$; $y=a^x$ ზრდადია, როცა $a>1$, კლებადია, როცა $0<a<1$; ამიტომ $y=a^x$ არ არის პერიოდული; $y=a^x$ დადებითია $\boldsymbol{R}$ სიმრავლეზე, ამიტომ მას არ აქვს ნული, ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმის წერტილები.

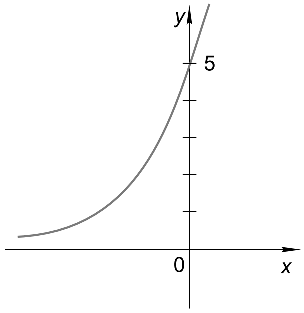
19 ფუნქციების გრაფიკები შეიძლება მივიღოთ $f(x)=2^x$ ფუნქციის გრაფიკისგან ა) $g(x)=2^{x+1}=f(x+1)$. g-ს გრაფიკი მიიღება f-ის გრაფიკისგან პარალელური გადატანით $\vec{p}(-1;\ 0)$ ვექტორით (მარცხნივ, 1 ერთეულით).

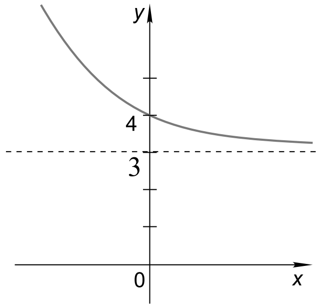
ბ) $h(x)=2^x-2=f(x)-2$, სადაც $f(x)=2^x$; h-ის გრაფიკი მიიღება პარალელური გადატანით $\vec{p}(0;\ -2)$ ვექტორით („ქვემოთ“ 2 ერთეულით).

გ) $k(x)=-2^x=-f(x)$, სადაც $f(x)=2^x$; ამიტომ k ფუნქციის გრაფიკი მიიღება f ფუნქციის გრაფიკისგან x ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიით.

20 ა) $y=5 \cdot 2^x$

გრაფიკი მიიღება y ღერძის მიმართ $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკის გაჭიმვით.



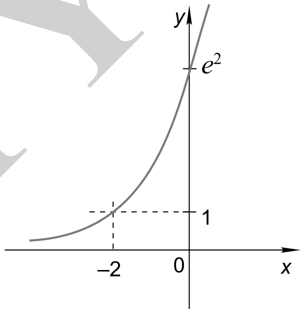


ბ) $y=2^{-x}+3$;

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$;

გრაფიკი მიიღება $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით $\vec{p}(0;\ 3)$ ვექტორით.

გ) $y=e^{x+2}$; მიიღება $y=e^x$ ფუნქციის გრაფიკისგან პარალელური გადატანით $\vec{p}(-2;\ 0)$ ვექტორით.



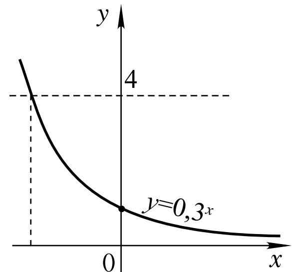
მოსწავლეები იყენებენ მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებებს, გრაფიკებს, გრაფიკების გარდაქმნის წესებს, რომლებზეც კლასში იმუშავეს და ასრულებენ საშინაო დავალებას. გთავაზობთ მითითებებს რამდენიმე ამოცანის ამოსახნელად.

12 ეს ამოცანა კლასში ამოხსნილი **12** ამოცანის მსგავსად გრაფიკების გამოყენებით უნდა ამოიხსნას. დ) შემთხვევაში მოსწავლეები ააგებენ $y=4^x$ და $y=17-\frac{x}{2}$ ფუნქციების გრაფიკებს და იპოვიან გადაკვეთის წერტილს: (2; 16). განტოლების ფესვია $x=2$.

15 კლასში ამოხსნილი **13** დავალების მსგავსია: ე) $\sqrt{5}-2=\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+2}=(\sqrt{5}+2)^{-1}$, $(\sqrt{5}+2)^m>(\sqrt{5}+2)^n$, $\sqrt{5}+2>1$ ამიტომ $m>n$.

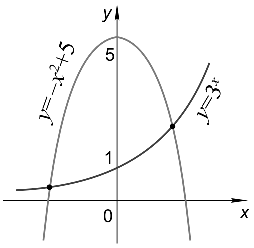
16 ვ) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-3$, მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(-3;\ +\infty)$ შუალედი.

17 დ) $a^{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}=a^{\sqrt{2}}a^{1-\sqrt{2}}=a$.



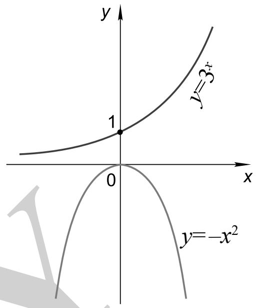
18 $0{,}3^x=4$; $y=4$ წრფე $y=0{,}3^x$ ფუნქციის გრაფიკს ერთ წერტილში კვეთს. განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი, რომელიც უარყოფითი რიცხვია.

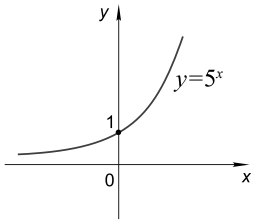
19



ა) $3^x=-x^2+5$ განტოლებას ორი ფესვი აქვს.

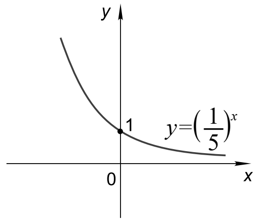
გ) $3^x=-x^2$ განტოლებას ფესვი არ აქვს — $y=3^x$ და $y=-x^2$ ფუნქციების გრაფიკები არ იკვეთება.

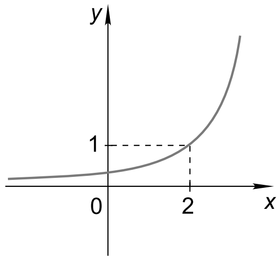




20 გრაფიკებს ავაგებთ ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნის წესების გამოყენებით.

ბ) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$-ის გრაფიკი სიმეტრიულია $y=5^x$-ის გრაფიკის ორდინატთა ღერძის მიმართ.

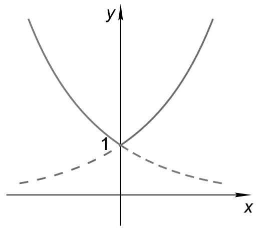




გ) $g(x)=5^{x-2}$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=5^x$ ფუნქციის გრაფიკისგან პარალელური გადატანით $\vec{p}(2;\ 0)$ ვექტორით („მარჯვნივ 2 ერთეულით“).

დ) $y=2^{|x|}$

საზოგადოდ, $y=f(|x|)$-ის გრაფიკი შეიძლება ავაგოთ შემდეგი წესით: ჯერ აიგება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მხოლოდ $x\geq0$, $x\in D(f)$ მნიშვნელობებისთვის და შემდეგ აიგება ამ გრაფიკის სიმეტრიული Oy ღერძის მიმართ.



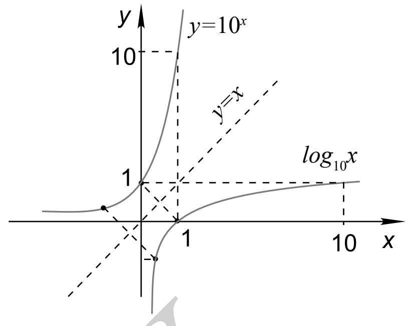
5.2 ლოგარითმული ფუნქცია

პარაგრაფის დასაწყისში განიხილება შექცეული ფუნქციის ცნება. ამ ცნებას მარტივი მაგალითების გამოყენებით ვიხსენებთ. განვიხილავთ წრფივი ფუნქციის შექცეული ფუნქციის მაგალითს, ვაგებთ მის გრაფიკს და ყურადღებას ვამახვილებთ ურთიერთშექცეული გრაფიკების განლაგებაზე — გრაფიკები $y=x$ წრფის მიმართ სიმეტრიულია. გადავდივართ მაჩვენებლიანი ფუნქციის შექცეული ფუნქციის განხილვაზე — ვაგებთ ამ ფუნქციის (ლოგარითმული ფუნქციის) გრაფიკს; ვაყალიბებთ რამდენიმე თვისებას; მაგალითად, თუ $a>1$, მაშინ $y=log_a x$ ფუნქცია ზრდადია $(0;\ +\infty)$ შუალედზე. ცალკე გამოვყოფთ ათობით და ნატურალურ ლოგარითმებს — $y=lgx$ და $y=lnx$ ფორმულებით მოცემულ ფუნქციებს.

ტექსტს ახლავს საკონტროლო კითხვები და „ტესტები“; პასუხების პოვნა ლოგარითმის განსაზღვრებისა და თვისებების ცოდნას მოითხოვს. ყურადღება გაამახვილეთ ძირითად ლოგარითმულ იგივეობაზე: $a^{log_a x}=x$ ტოლობაზე, რომელიც ჭეშმარიტია ნებისმიერი დადებითი a და x-ისთვის, ამასთანავე, $a\neq1$. ამ ტოლობის გამოყენებით, მარტივად იხსნება **11** ამოცანის დავალებები.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

14 ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ; თუ წერტილი $(a;\ b)$ ეკუთვნის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს და f შექცევადი ფუნქციაა, მაშინ $(b;\ a)$ წერტილი ეკუთვნის მისი შექცეული ფუნქციის გრაფიკს; შევახსენოთ მოსწავლეებს ამ სიმეტრიის კოორდინატებით წარმოდგენაც:



$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x. \end{cases}$$

$f(x)=10^x$ და $g(x)=log_{10}x$ ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ:

15 მოსწავლეები იხსენებენ უტოლობების ამოხსნის ხერხებს:

ა) $\dfrac{3-x}{x+2}>0$; ბ) $x^2-4x+3>0$.

ორივე უტოლობა შეიძლება კვადრატული უტოლობის ამოხსნის წესით ამოიხსნას:

$(3-x)(x+2)>0,\ (x-3)(x+2)<0;\ (-2;\ 3).$

$x^2-4x+3>0,\ (x-3)(x-1)>0;\ (-\infty;\ 1)\cup(3;\ +\infty).$

18 ა) ვიყენებთ ლოგარითმული ფუნქციის თვისებებს; $e\approx2{,}7$; $e>1$;

$(10^{\frac{1}{3}})^6=100;\ (\sqrt{5})^6=125;\ ln\sqrt{5}>ln\sqrt[3]{10}.$

19 თუ ფუძე 1-ზე მეტია, მაშინ 1-ზე მეტი რიცხვის ლოგარითმი დადებითია, 1-ზე ნაკლები რიცხვის ლოგარითმი უარყოფითია. თუ ფუძე 1-ზე ნაკლებია, 1-ზე მეტი რიცხვის ლოგარითმი უარყოფითია, 1-ზე ნაკლები რიცხვის ლოგარითმი დადებითია.

$ln5{,}7>0,$ $ln0{,}36<0;$ $\dfrac{ln5{,}7}{ln0{,}36}<0.$

20, 21 ვიყენებთ ლოგარითმული ფუნქციის თვისებებს:

20 ა) $log_{\frac{1}{3}}(x-4)=-2,\ x-4=9,\ x=13;$

ბ) $log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)=-2,\ x^2+1=4,\ x=\pm\sqrt{3}.$

21 დ) $log_{\frac{1}{2}}(1-2x)>0,$

$log_{\frac{1}{2}}(1-2x)>log_{\frac{1}{2}}1.$

აქ ვითვალისწინებთ, რომ უნდა შესრულდეს პირობები (ლოგარითმის თვისების გათვალისწინებით):

$$\begin{cases} 1-2x>0 \\ 1-2x<1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<\dfrac{1}{2} \\ x>0 \end{cases}; \qquad (0;\ \tfrac{1}{2}).$$

საშინაო დავალების ამოცანების უმრავლესობა კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურად იხსნება; ვიყენებთ ლოგარითმის განსაზღვრებას, თვისებებს (ზრდადობა, კლებადობა), ძირითად იგივეობას.

20 ბ) $log_3(2x+5)=0$,
$log_3(2x+5)=log_3 1$;
$2x+5=1$, $x=-2$.

21 ა) $log_3 x<log_3 3$; ლოგარითმი ზრდადია, $x<3$; გასათვალისწინებელია: $x>0$. პასუხი: $(0;\ 3)$.

ბ) $log_{\frac{1}{2}} x<log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$; ფუძე 1-ზე ნაკლებია, ლოგარითმული ფუნქცია კლებადია; $x>\sqrt{2}$; $(\sqrt{2};\ +\infty)$.

გაკვეთილზე შეიძლება ვისაუბროთ მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების გამოყენებების შესახებ; საბანკო საქმეში პრაქტიკული გამოყენებები ტექსტში იყო მოცემული. ყურადღებას გავამახვილებთ საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში მაჩვენებლიანი ფუნქციის გამოყენებებზე და ამ მიმართულებით იმ აღმოჩენებზე, რომელიც ქალ მეცნიერს მარი კიურის ეკუთვნის; ვთხოვოთ მოსწავლეებს, დამატებით მოიძიონ მასალა ამ გამოჩენილი მეცნიერის შესახებ. ამასთანავე, ვემზადებით კომპლექსური დავალების შესასრულებლად; მოძიებულ მასალას კომპლექსურ დავალებაში გამოვიყენებთ. კიდევ ერთხელ გავამახვილოთ ყურადღება ქალი მათემატიკოსების წარმატებებზე მათემატიკასა და მეცნიერების სხვა დარგებში.

5.3 ლოგარითმის თვისებები

წინარე ცოდნის გააქტიურების შემდეგ ვასაბუთებთ ლოგარითმის თვისებებს. წინარე ცოდნა ლოგარითმის განსაზღვრება, მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების შექცევადობისა და მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებების წარმოდგენაა. ამ საკითხების გამოყენებით, ვასაბუთებთ თვისებებს: თუ $a>0$, $b>0$, $a\neq1$, $b\neq1$, $u>0$, $v>0$, n ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ

1) $log_a(uv)=log_a u+log_a v$; 2) $log_a\left(\frac{u}{v}\right)=log_a u-log_a v$;

3) $log_a u^n=nlog_a u$; 4) $log_a u=\frac{log_b u}{log_b a}$.

კიდევ ერთხელ გავამახვილებთ ყურადღებას ძირითად ლოგარითმულ იგივეობაზე, რომელიც ლოგარითმის განსაზღვრების შედეგია: როცა $b>0$, $a>0$, $a\neq1$,

$a^x=b$, $x=log_a b$, $a^{log_a b}=b$.

მოსწავლეები, ხშირად, ანალოგიით მსჯელობენ; შეცდომების თავიდან ასაცილებლად ვამახვილებთ ყურადღებას არასწორ ტოლობებზე, ლოგარითმის არასწორ გამოყენებაზე. ლოგარითმის თვისებების შესახებ ცოდნის განმტკიცებას დიდი მნიშვნელობა აქვს. მნიშვნელოვანია, მარტივი შემთხვევებით, „ერთმოქმედებიანი“ ამოცანებით დაწყება. „ტესტებში“ პასუხების მოძიება, ლოგარითმის თვისებების სწორ გამოყენებას უკავშირდება.

(7) და (8) ამოცანებით შეიძლება ლოგარითმის თვისებების გამოყენების შესახებ ცოდნის განმტკიცება. რამდენიმე ამოცანის საჯარო განხილვის შემდეგ, შეიძლება დანარჩენი შემთხვევების განხილვა მოსწავლეებს დამოუკიდებელი მუშაობის სახით შევთავაზოთ.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

(9) ა) $72=3^2 \cdot 2^3$, მაშასადამე,

$log_5 72=log_5(3^2 \cdot 2^3)=2log_5 3+3log_5 2=2b+3a.$

ბ) $log_5 30=log_5(2 \cdot 3 \cdot 5)=log_5 2+log_5 3+log_5 5=a+b+1.$

ანალოგიურია საშინაო დავალების △7 ამოცანა.

(10) გ) $ln\sqrt[3]{e^5}=lne^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}lne=\frac{5}{3}.$

შევახსენოთ მოსწავლეებს ნატურალური ლოგარითმის აღნიშვნა, ნეპერის რიცხვის მნიშვნელობა ლოგარითმის პრაქტიკულ გამოყენებებში.

(12) $log_{\sqrt{3}}25-log_3 7\frac{58}{81}=\frac{log_3 25}{log_3\sqrt{3}}-log_3\frac{625}{81}=2\,log_3 25-log_3\frac{625}{81}=log_3\left(625\cdot\frac{81}{625}\right)=log_3 81=4.$

ზოგიერთმა მასწავლებელმა შეიძლება (კლასის მზაობის გათვალისწინებით) ფუძის შეცვლის კერძო შემთხვევები დაასაბუთოს; მაგალითად, $log_{a^n}b^m=\frac{m}{n}log_a b$;

მაშინ $log_{\sqrt{3}}25=(2:\frac{1}{2})log_3 5=log_3 625;$

$log_{\sqrt[3]{2}}2=(1:\frac{1}{3})log_2 2=3.$

(13) ა) $3^{log_2 6}=2^{log_2 6 \cdot log_2 3}$, $5^{log_2 3}=2^{log_2 3 \cdot log_2 5}.$

$log_2 6>log_2 5$, $log_2 3>0$, ამიტომ $3^{log_2 6}>5^{log_2 3}$.

შეიძლება ასეც ამოვხსნათ: ვთქვათ, $x=3^{log_2 6}$, $y=5^{log_2 3}$, მაშინ $log_2 x=log_2 6 \cdot log_2 3$;

$log_2 y=log_2 3 \cdot log_2 5.$

რადგან $log_2 x>log_2 y$, ლოგარითმი ამ შემთხვევაში ზრდადია, ამიტომ $x>y$.

გ) შევადაროთ: $log_{0,2}3+log_{0,2}4$ და $log_{0,2}7$

$log_{0,2}3+log_{0,2}4=log_{0,2}12;$

$12>7$, $0<0,2<1$, ამიტომ $log_{0,2}3+log_{0,2}4<log_{0,2}7.$

(14) ა) რადგან $4<7<8$, ამიტომ $2<log_2 7<3$.
რადგან $5<16<25$, ამიტომ $1<log_5 16<2$.
მაშასადამე, $log_2 7>log_5 16$.
ბ) ვადარებთ რიცხვებს: $log_{11}10$ და $log_{10}11$-ს.
$log_{11}10<log_{11}11=1$;
$log_{10}11>log_{10}10=1$.
მაშასადამე, $log_{10}11>log_{11}10$.

(15) ამ ამოცანაში მოცემული ფორმულების შესახებ ზემოთ ვისაუბრეთ; ეს ფორმულები ფუძის შეცვლის ფორმულის შედეგებია.

6 დ) $lnx-3ln(x+1)=lnx-ln(x+1)^3=ln\frac{x}{(x+1)^3}$; ვ) $\frac{1}{2}log_7(x-3)=log_7\sqrt{x-3}$.

7 ბ) $log_5 1{,}5=log_5\frac{3}{2}=log_5 3-log_5 2=b-a$.

9 ბ) $2log_7\sqrt{70}-log_7 10=log_7 70-log_7 10=log_7\frac{70}{10}=log_7 7=1$.

10 დ) $lg12-lg120=lg\frac{12}{120}=lg\frac{1}{10}=-1$.

საშინაო დავალების ამოცანების უმრავლესობა საკლასო ამოცანების ანალოგიურია; მაგრამ აუცილებელია ისეთი ამოცანების ჩართვაც, რომლებიც განსხვავებულ მსჯელობას მოითხოვს. კლასში დაწვრილებით გავარჩიოთ 11-ის სამივე ამოცანა. გამოვიყვანოთ და გამოვიყენოთ ფორმულა:

$log_b a=\frac{1}{log_a b}$, $a>0$, $b>0$, $a\neq1$, $b\neq1$.

11 ა) მოსწავლემ უნდა შენიშნოს, რომ $log_7 3$ და $log_3 7$ ერთისგან განსხვავებული ურთიერთშებრუნებული დადებითი რიცხვებია, ამიტომ მათი ჯამი 2-ზე მეტია.

ბ) $log_{\frac{1}{3}}3+log_3\frac{1}{2}=-1-log_3 2>-2$, რადგან $log_3 2<1$, $-log_3 2>-1$.

გ) $4^{log_5 7}=x$, $7^{log_5 4}=y$
$log_5 x=log_5 7\cdot log_5 4$;
$log_5 y=log_5 4\cdot log_5 7$.
მაშასადამე, $x=y$.
კლასში ეს ამოცანა მეორე ხერხითაც ამოვხსენით (იხილეთ, (13)-ის ამოხსნები).

12 ა) ვიყენებთ მსჯელობას, რომელიც (14) დავალებების ამოხსნისას გამოვიყენეთ:
$8<9<16$, $3<log_2 9<4$; $5<24<25$, $1<log_5 24<2$;
მაშასადამე, $log_2 9>log_5 24$.
ბ) ვიყენებთ (14)-ის ბ) ამოცანის ამოხსნის მსგავს მსჯელობას:
$log_9 8<1$; $log_8 9>1$; მაშასადამე, $log_8 9>log_9 8$.

5.4 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნის მაგალითები

მათემატიკის ახალი სტანდარტის მიხედვით, საშუალო საფეხურზე მათემატიკის პროგრამის შინაარსში ბევრი ახალი საკითხი განიხილება, იდეურად უფრო მდიდარი და მრავალფეროვანი გახდა პროგრამა. ეს ცვლილებები რეფორმის პირველი წლებიდან დაიწყო: გეომეტრიული გარდაქმნები, კოორდინატთა და ვექტორთა მეთოდი, ალბათობა და სტატისტიკა, მონაცემთა ანალიზი, წრფივი დაპროგრამების ამოცანები. ამან, ცხადია, გამოიწვია ტრადიციული მასალის შემცირების აუცილებლობა (ტრიგონომეტრიული განტოლებები, ირაციონალური განტოლებები და უტოლობები, ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი განტოლებები, მოდულის შემცველი, პარამეტრის შემცველი განტოლებები). ზოგიერთმა მეცნიერმა აღნიშნულ მასალას „რეპეტიტორული“ მათემატიკა უწოდა და მათი მომრავლება მისაღები გამოცდებით ახსნა. ერთიანი ეროვნული გამოცდების ექსპერტთა ჯგუფი ითვალისწინებს იმ ცვლილებებს, რომლებიც სასკოლო მათემატიკის შინაარსმა განიცადა. მაგალითად, მხოლოდ უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების განხილვა მოეთხოვება აბიტურიენტს. აღარ გვხვდება რთული ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი განტოლებები და უტოლობები.

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებებისა და უტოლობების განხილვა ჩვენ შესაბამისი ფუნქციების თვისებებსა და გრაფიკებს დავუკავშირეთ. მაგალითად, მასალის განხილვა ტექსტში მაჩვენებლიანი განტოლებით იწყება: $a^x=b$. ამ განტოლების ამოხსნას ვუკავშირებთ $y=a^x$ და $y=b$ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების პოვნის ამოცანას. თუ $b\leq0$, მაშინ გრაფიკები არ იკვეთება, განტოლებას არ აქვს ამონახსნი; თუ $b>0$, რადგან $y=a^x$ ფუნქცია მონოტონური ფუნქციაა და ყველა დადებით მნიშვნელობას ერთელ იღებს, განტოლებას ერთი ამონახსნი აქვს.

განტოლების ამოხსნას წინ უნდა უსწრებდეს შემამზადებელი აქტივობები; ვიხსენებთ $y=a^x$ ფუნქციის თვისებებს, გრაფიკის გამოსახულებას a-ს სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის — როცა $a>1$ და როცა $0<a<1$. შემდეგ ვმსჯელობთ განტოლების ამოხსნის შესახებ.

სასურველია, კლასში დაწვრილებით გავარჩიოთ განტოლებათა შემოთავაზებული მაგალითების ამოხსნები.

ანალოგიურად მიმდინარეობს მაჩვენებლიანი უტოლობის ამოხსნა — გრაფიკის გამოყენებით. ყურადღებას ვამახვილებთ $y=a^x$ ფუნქციის თვისებებზე. ამ თვისებების განსხვავებულობაზე $0<a<1$ და $a>1$ შემთხვევებში. კლასში განვიხილავთ იმ უტოლობებს, რომელთა შესახებ მსჯელობა პარაგრაფის თეორიულ ნაწილშია წარმოდგენილი. ლოგარითმულ განტოლებებზე მსჯელობა შესაბამისი ფუნქციის განხილვით იწყება; განტოლების გარდაქმნისას შეიძლება მივიღოთ განტოლება, რომელიც მოცემულის ტოლფასი არ არის, შეიცავს ფესვებს (ამონახსნებს), რომლებიც მოცემული განტოლების ფესვები არ არის (გარეშე ფესვები). მათი აღმოჩენა ორი გზით შეიძლება — ვამოწმებთ პასუხებს, ან ვითვალისწინებთ განსაზღვრის არეებს.

ლოგარითმული უტოლობის ამოხსნისას, სასურველია, თავიდანვე გავითვალისწინოთ ლოგარითმის განსაზღვრის არე. სასურველია, ისეთი განტოლებაც განვიხილოთ, რომლის ამოხსნა განსაზღვრის არის პოვნას უკავშირდება; მაგალითად, $lgx+lg(x-1)=lg(x^2-x)$

განტოლების ამოხსნისას (როცა არ ვითვალისწინებთ განსაზღვრის არეებს) მიიღება განტოლება, რომელსაც ნებისმიერი რიცხვი აკმაყოფილებს, მაგრამ ნებისმიერი რიცხვი არ შეიძლება იყოს ამ განტოლების ფესვი, რადგან განტოლება მხოლოდ იმ x-ებისთვის არის განსაზღვრული, რომლებიც $\begin{cases} x>0 \\ x-1>0 \end{cases}$

სისტემის ამონახსნებია. ამრიგად, $(1;\ +\infty)$ შუალედი მოცემული განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

12 ბ) $\begin{cases} lg(lgx)\geq 0 \\ lgx>0 \\ x>0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} lgx\geq 1 \\ x\geq 1 \end{cases}$ $\quad \Big| \quad x\geq 10.$

13 ბ) $lg_{\frac{1}{2}}(1-2x)>-2$

$\begin{cases} 1-2x>0 \\ 1-2x<4 \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{matrix} 2x<1 \\ 2x>-3 \end{matrix} \quad \Big| \quad \begin{matrix} x<0{,}5 \\ x>-1{,}5 \end{matrix}$

$(-1{,}5;\ 0{,}5).$

14 ა) $log_5 x^2>log_5 x$

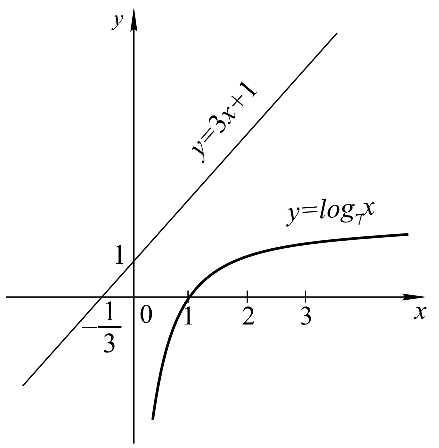
$\begin{cases} x^2>x \\ x>0 \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{matrix} x(x-1)>0 \\ x>0 \end{matrix} \quad \Big| \quad x-1>0$

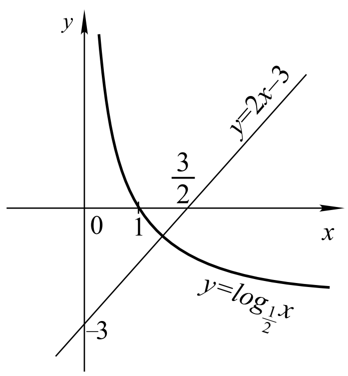
$(1;\ +\infty).$

15 ა) $log_7 x=3x+1$

$\begin{cases} y=log_7 x \\ y=3x+1. \end{cases}$

განტოლებას ფესვი არ აქვს.





ბ) $log_{\frac{1}{2}} x=2x-3$

$\begin{cases} y=log_{\frac{1}{2}} x \\ y=2x-3 \end{cases}$

განტოლებას ერთი ფესვი აქვს.

16 ბ) $lgx=-2-lg(a+b)+lg2;$

$lgx=lg0{,}01-lg(a+b)+lg2;$

$lgx=lg\frac{2}{100(a+b)};$

$x=\frac{1}{50(a+b)}.$

18 ბ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}-\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=4{,}96.$

აღვნიშნოთ: $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=y.$

$\frac{1}{5y}-y=4{,}96;$

$5-25y^2=124y;$

$25y^2+124y-5=0;$

$y=\frac{-62\pm63}{25};\quad y=\frac{1}{25}.$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=\frac{1}{25};\quad x=2.$

გ) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot2^{\sqrt{x-2}}$

აღვნიშნოთ $2^{\sqrt{x-2}}=y;$

$y^2-10y+16=0;$

$y_1=8,\ y_2=2.$

$\sqrt{x-2}=3;\ \sqrt{x-2}=1;$

$x=11;\ x=3.$

19-ში ა) და გ) უტოლობები აღნიშვნების შემოტანით იხსნება; ბ) და დ) — ერთნაირ ფუძეზე დაყვანით.

ბ) $3^{4x+3}\le3^{-2x^2}$, $-2x^2\ge4x+3$, $2x^2+4x+3\le0$. უტოლობას არა აქვს ამონახსნი.

გ) $9^x-\frac{28}{3^{2x-1}}+\frac{1}{3}>0;$ აღვნიშნოთ: $9^x=y.$

$y-\frac{28\cdot3}{y}+\frac{1}{3}>0,\quad \frac{3y^2+y-28\cdot9}{y}>0.$

რადგან $y>0$, ამიტომ ვღებულობთ:

$3y^2+y-28\cdot9>0,\quad y=\frac{-1\pm55}{6},$

$y_1=9,\ y_2=-\frac{28}{3},$

$y>9$ ან $y<-\frac{28}{3},$

$9^x>9,\ x>1.$

21 ა) $log_5^2x+log_{\frac{1}{5}}x=2;$

$log_5^2x-log_5x-2=0;$

$log_5x=2,\ log_5x=-1;$

$x=25,\ x=\frac{1}{5}.$

22 ა) გავითვალისწინოთ, რომ $log_{\sqrt{3}}x=2log_3x$ და შემოვიტანოთ აღნიშვნა $log_3x=y$, მაშინ გვაქვს:

$$4y-\frac{1}{y}=3;$$
$$4y^2-3y-1=0;$$
$$y_1=1,\ y_2=-\frac{1}{4};$$
$$log_3x=1;\ log_3x=-\frac{1}{4};$$
$$x=3,\ x=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

ბ) $8^x+18^x=2\cdot 12^x$.

კლასში ამ ამოცანის გარჩევის შემდეგ, მოსწავლეები ადვილად ამოხსნიან ანალოგიურ განტოლებებს.

თუ განტოლებას გადავწერთ $2^{3x}-3^{2x}\cdot 2^x=2\cdot 3^x\cdot 2^{2x}$ სახით, შევამჩნევთ, რომ ყოველი წევრი $3x$ ხარისხისაა ($3x$ ხარისხის ერთგვაროვანი განტოლებაა), ამიტომ გავყოთ განტოლების ყველა წევრი, მაგალითად, $2^x\cdot 3^{2x}$-ზე, ანუ 18^x-ზე. მივიღებთ:

$$\left(\frac{8}{18}\right)^x+1=2\left(\frac{12}{18}\right)^x.$$
$$\left(\frac{4}{9}\right)^x+1=2\left(\frac{2}{3}\right)^x; \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x=y; \quad y^2-2y+1=0; \quad y=1;$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=1,\ x=0.$$

23 ა) $log_5x\cdot log_7x=log_57.$

ვიყენებთ ფუძის შეცვლის ფორმულას.

$$\frac{log_5x\cdot log_5x}{log_57}=log_57$$
$$(log_5x)^2=(log_57)^2$$
$$log_5x=log_57 \text{ ან } log_5x=-log_57$$
$$x=7 \text{ ან } x=\frac{1}{7}.$$

24 ა) $log_{0,2}log_2\frac{x^2}{x+2}>0$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{x+2}>0\\ log_2\frac{x^2}{x+2}>0\\ log_2\frac{x^2}{x+2}<1\end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l}x+2>0,\ x\neq 0\\ \frac{x^2}{x+2}>1\\ \frac{x^2}{x+2}<2.\end{array}$$

$$\begin{cases}x+2>0\\ x^2-x-2>0\\ x^2-2x-4<0\end{cases} \qquad \begin{cases}x>-2\\ x>2 \text{ ან } x<-1\\ 1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5}\end{cases}$$

$$1-\sqrt{5}<x<-1 \text{ ან } 2<x<1+\sqrt{5}.$$

25 ა) აქ $-x>0$, $x<0$, ამიტომ $log_2x^2=2log_2(-x)$;

$2log_2(-x)-log_2(-x)-2=0$;

$log_2(-x)=2$;

$-x=4$; $x=-4$.

ბ) $2lg(1-x)=2lg(1-x)$;

$1-x>0$; $x<1$;

$(-\infty;\ 1)$.

26 ა) $\begin{cases} 2-x>0 \\ x-3>0 \\ 2-x>x-3 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x<2 \\ x>3 \\ x<2{,}5 \end{array} \right.$ არ აქვს ამონახსნი.

ბ) $lg(x^2+1)>lg(4x-7)$

$\begin{cases} 4x-7>0 \\ x^2+1>4x-7 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x>\dfrac{7}{4} \\ x^2-4x+8>0 \end{array} \quad \right| \quad \begin{array}{l} x>\dfrac{7}{4}; \\ x^2-4x+8>0,\ \dfrac{D}{4}=4-8<0; \end{array} \quad \left| \quad (\dfrac{7}{4};\ +\infty). \right.$

x ნებისმიერია

სასურველია, რომ ამ განტოლებათა და უტოლობათა ამოხსნის შემდეგ მასწავლებელმა შეაჯამოს განხილული საკითხი, ხაზი გაუსვას მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების თვისებებისა და შესაბამისი გრაფიკების ცოდნის აუცილებლობას განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნისას. ამასთანავე, შეიძლება გამოიყოს რამდენიმე ხერხი:

1. ვცდილობთ, თუ შესაძლებელია, განტოლების (უტოლობის) ორივე მხარე ერთი და იმავე ფუძის ხარისხად წარმოვადგინოთ; მაშინ შესაძლებელი ხდება ფუნქციების თვისებების გამოყენება.

2. შეიძლება საჭირო გახდეს ახალი ცვლადის შემოღება, ამ ცვლადის მიმართ მიღებული განტოლების ან უტოლობის ამოხსნა და პირველი ტიპის განტოლების, ან უტოლობის მიღება.

3. ლოგარითმულ უტოლობებში აუცილებელია განსაზღვრის არის დადგენა და მისი გათვალისწინება. ზოგჯერ განტოლების ამოხსნის დროსაც შეიძლება დაგვჭირდეს განსაზღვრის არის პოვნა; თუმცა, აქ, ხშირად, შემოწმებით შემოვიფარგლებით ხოლმე; ფრთხილად უნდა ვიყოთ ლოგარითმის თვისებების გამოყენებისას; მაგალითად, თუ $x>0$, მაშინ $lgx^2=2lgx$ და თუ $x<0$, $lgx^2=2lg(-x)$. ანუ, $lgx^2=lg|x|$, როცა $x\neq0$.

4. ზოგიერთი განტოლება ცვლადის შემცველ ხარისხზე გაყოფით იხსნება, როცა ყველა წევრი ცვლადის შემცველ ერთნაირ ხარისხს შეიცავს; მასწავლებლებმა იციან, რომ, ფაქტობრივად, ამ დროს ორი სხვადასხვა ფუძის ხარისხების მიმართ „ერთგვაროვანი“ განტოლება გვაქვს.

ამ საუბრის მიმდინარეობისას, შეიძლება შესაბამისი საილუსტრაციო მაგალითების განხილვაც ამოხსნილი ამოცანებიდან.

5. შეიძლება დაგვჭირდეს ფუძის შეცვლის ფორმულის გამოყენება.

ეს საუბარი, განხილულ ამოცანებთან ერთად, დაეხმარება მოსწავლეებს საშინაო დავალების შესრულებაში.

მაგალითები:

13 $log_2 x<log_2(x+4)$. აუცილებელია სისტემის ამოხსნა:

$$\begin{cases} x<x+4 \\ x>0 \\ x+4>0. \end{cases}$$

16 $lgx-lgy=0,\ lg\frac{x}{y}=0$

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=1 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad \begin{matrix} y=x \\ x>0 \\ y>0. \end{matrix}$$

მივიღეთ $y=x$ წრფის ის ნაწილი, რომელიც I მეოთხედს ეკუთვნის და არ შეიცავს სათავეს.

17 ბ) $2\cdot3^{x+1}-4\cdot3^{x-2}=150$; აქ საკმარისია აღნიშვნა: $3^x=y$.

18 ე) $0,04^x-26\cdot0,2^x+25\le0$, $\quad 0,2^x=y$,

$y^2-26y+25\le0$,

$y_1=25,\ y_2=1$,

$1\le y\le25$ (y-ის მიმართ მიღებული უტოლობა ბოლომდე უნდა ამოვხსნათ);

$1\le\left(\frac{1}{5}\right)^x\le25$,

$5^0\le5^{-x}\le5^2,\ 0\le-x\le2,\ -2\le x\le0$.

19 ბ) $log_2^2x-log_2x\le6$.

$log_2x=y$

$y^2-y-6\le0,\ \ -2\le y\le3,\ -2\le log_2x\le3$,

$\frac{1}{4}\le x\le8$.

21 ბ) $25^x-10^x=2\cdot4^x$

$5^{2x}-2^x\cdot5^x=2\cdot2^{2x}$

გავყოთ, მაგალითად, $2^x\cdot5^x$-ზე.

$\left(\frac{5}{2}\right)^x-1=2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x$,

$y-1=\frac{2}{y}$,

$y^2-y-2=0,\ y_1=2,\ y_2=-1$,

$\left(\frac{5}{2}\right)^x=2,\ x=log_{\frac{5}{2}}2$.

22 ბ) $log_5x+log_7x=log_535$.

$log_5x+\frac{log_5x}{log_57}=log_57+1$,

$\frac{log_5x}{log_57}(log_57+1)=log_57+1$,

$log_5x=log_57$,

$x=7$.

23 ბ) $lg^2x-2>lgx$.

ვთქვათ, $lgx=y$.

$y^2-y-2>0$; $\ y>2$ ან $y<-1$;

$lgx>2$ ან $lgx<-1$, ამასთანავე $x>0$.

$x>100$ ან $0<x<\frac{1}{10}$.

24 ბ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}>\left(\frac{3}{2}\right)^3$;

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}>\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, $\quad x^2-3x+3<0$, $\quad$ უტოლობას არ აქვს ამონახსნი.

5.5 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების გამოყენების მაგალითები

ამ პარაგრაფით ვაჯამებთ გაწეულ მუშაობას მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების შესახებ. წინარე ცოდნის გააქტიურება ამ ფუნქციების თვისებებისა და გრაფიკების შესახებ ცოდნის გააქტიურებას უკავშირდება. მნიშვნელოვანია საუბარი ნეპერის რიცხვისა და მისი მნიშვნელობის შესახებ პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას. ამ რიცხვის მნიშვნელობამ გვიკარნახა, რომ სასურველია, მოსწავლეები სკოლაში გაეცნონ ნეპერის რიცხვს — ირაციონალური რიცხვის კიდევ ერთ მაგალითს. სასურველია დაფაზე ერთდროულად წარმოვადგინოთ და აღვწეროთ $y=2^x$, $y=3^x$ და $y=e^x$ ფუნქციების გრაფიკები. ვსაუბრობთ იმ მიმდევრობის შესახებ, რომელიც e რიცხვს უკავშირდება; მოსწავლეებს ვეუბნებით, რომ ამ მიმდევრობის წევრების გამოთვლით შეიძლება e რიცხვის პოვნა მიახლოებით. ეს მიმდევრობა ზრდადია, თუმცა, მისი ყოველი წევრი 3-ზე ნაკლებია, n-ის ზრდასთან ერთად ამ მიმდევრობის n-ური წევრი „უსასრულოდ უახლოვდება“ e რიცხვს, რომელსაც ნეპერის რიცხვი ეწოდება — n-ის ზრდისას e რიცხვსა და მიმდევრობის n-ურ წევრს შორის სხვაობის მოდული ნებისმიერ დასახელებულ დადებით რიცხვზე ნაკლები ხდება. ეს ნაწილი მოსწავლეთა შემზადებაცაა კომპლექსური დავალების შესასრულებლად.

გადავდივართ ნაცნობ საკითხებზე. აქ გაკვეთილი, ისევე, როგორც თითქმის ყველა სხვა გაკვეთილი, ინტერაქტიული ფორმით ჩავატაროთ.

— ვთქვათ, ბანკში შეტანილია 400 ლარი და წლიური განაკვეთი (რიცხვით გამოსახული) r-ია (მაგალითად, თუ პროცენტული დარიცხვა 12%-ია, მაშინ $r=0,12$).

1 წლის შემდეგ რა თანხა იქნება?

— 2 წლის შემდეგ რა თანხა იქნება?

— 3 წლის შემდეგ რა თანხა იქნება?

— n წლის შემდეგ რა თანხა იქნება?

— რა ფორმულით გამოისახება თანხა n წლის შემდეგ?

— თუ დარიცხვა წელიწადში n-ჯერ ხდება და თითოეულ ჯერზე r/n რიცხვია დარიცხვის განაკვეთი, მაშინ t წლის შემდეგ რამდენჯერ მოხდება დარიცხვა? რა ფორმულით მოხდება t წლის შემდეგ დაგროვილი თანხის გამოანგარიშება?

აქ შეიძლება დავეხმაროთ მოსწავლეებს და ერთად მივიდეთ დასკვნამდე — n-ის ზრდის შემთხვევაში („დაუსრულებლად“, „უსასრულოდ“), ვამბობთ, რომ დარიცხვა უწყვეტად მიმდინარეობს და დაგროვილი თანხა გამოითვლება ფორმულით:

$$A=Pe^n.$$

ტექსტში წარმოდგენილი მათემატიკური მოდელი უკავშირდება ბაქტერიების პოპულაციის გამრავლებას, რომელიც ხელსაყრელი პირობებისას, შეიძლება ითქვას, უწყვეტად მიმდინარეობს და მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებების განხილვით აღიწერება. ამასთანავე, შეიძლება ნატურალური ლოგარითმის გამოყენება და $N(t)=N_0e^{kt}$ ფორმულიდან t-ს (დროის მონაკვეთი) მიმართ ფორმულის მიღება:

$$kt=ln\frac{N(t)}{N_0}, \qquad t=\frac{1}{k}ln\frac{N(t)}{N_0}.$$

ამ ფორმულას მოსწავლეები გამოიყენებენ 3 ამოცანის ამოხსნისას.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

1 გამოვსახოთ ათწილადით პროცენტული განაკვეთი; $r=9{,}5\cdot\frac{1}{100}=0{,}095$.
პირობის თანახმად,

$$P\left(1+\frac{0{,}095}{4}\right)^{4t}=2P,$$
$$(1{,}02375)^{4t}=2,$$
$$4t=\frac{ln2}{ln1{,}02375},$$
$$t=\frac{1}{4}\cdot\frac{ln2}{ln1{,}02375}\approx\frac{1}{4}\cdot\frac{0{,}69315}{0{,}02347}\approx7{,}38.$$

მაშასადამე, თანხა მიახლოებით მერვე წლის მეორე კვარტლის დასასრულს გაორკეცდება.

2 t წლის შემდეგ დაგროვილი თანხაა $A=Pe^{0{,}075t}$.
თუ $t=1$, მაშინ $A=Pe^{0{,}075}$. თანხა გაიზრდება $e^{0{,}075}$-ჯერ; $e^{0{,}075}\approx1{,}078$.
მაშასადამე, გაიზრდება 1,078-ჯერ, ანუ 7,8%-ით (მიახლოებით).

3 პირობის თანახმად, $R(30)=\frac{1}{2}R_0$ (იყო R_0, 30 დღის შემდეგ განახევრდა).

$$\frac{1}{2}R_0=R_0e^{k\cdot30},\ 30k=ln\frac{1}{2},$$
$$k=\frac{-ln2}{30}\approx\frac{-0{,}69315}{30}\approx-0{,}023.$$

ახლა ვიპოვოთ t-ს ის მნიშვნელობა, როცა $R(t)=\frac{R_0}{100}$. მივიღებთ:

$\frac{R_0}{100}=R_0e^{kt}$, საიდანაც

$t=\frac{-ln100}{k}\approx\frac{-4{,}605}{-0{,}023}\approx200{,}22$. მიახლოებით, 200 დღის შემდეგ.

4 ა) t წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა ასე გამოითვლება:

$$P\left(1+\frac{0{,}075}{12}\right)^{12t}.$$

პირობის თანახმად,

$$P\left(1+\frac{0{,}075}{12}\right)^{12t}=500\,000;$$
$$P\cdot1{,}00625^{12t}=500\,000,$$
$$P=\frac{500\,000}{1{,}00625^{240}}\approx112\,087.$$

ბ) $$P\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{12t}=500\,000,$$
$$P\cdot1{,}01^{12t}=500\,000,$$
$$P=\frac{500\,000}{1{,}01^{240}}\approx45\,900$$ (ლარი).

5 ა) $2P_0=P_0e^{rt}$;
$rt=ln2,\ t=\frac{ln2}{r}$;

ბ) $3P_0=P_0e^{rt}$,
$rt=ln3,\ t=\frac{ln3}{r}$.

6 $m(t)=m_0e^{-kt}$ $(k>0)$.

$$m(1500)=\frac{1}{2}m_0,\qquad \frac{1}{2}m_0=m_0e^{-1500k},$$
$$e^{-1500k}=\frac{1}{2},\qquad 1500k=ln2,$$
$$k=\frac{ln2}{1500}=\frac{0{,}69315}{1500}\approx0{,}00046\approx0{,}0005.$$

ვიპოვოთ $m(1\,000\,000)$. $m_0e^{-0{,}0005\cdot1000000}=m_0e^{-500}=\frac{m_0}{e^{500}}$.

7 $N(t)=\dfrac{M}{1+\left(\dfrac{M}{N_0}-1\right)e^{-kt}}=\dfrac{10000e^{\frac{1}{5}t}}{e^{\frac{1}{5}t}+\left(\dfrac{10000}{500}-1\right)}$;

$N(t)=\dfrac{10\,000e^{\frac{1}{5}t}}{e^{\frac{1}{5}t}+19}$;

ა) $N(5)=\dfrac{10000e}{19+e}\approx 1251$ (თევზი).

ბ) $N(t)=2\ 000$ — ამოვხსნათ t-ს მიმართ განტოლება:

$\dfrac{10\,000e^{\frac{1}{5}t}}{e^{\frac{1}{5}t}+19}=2000$;

$8\,000e^{\frac{1}{5}t}=38\,000$;

$e^{\frac{1}{5}t}=\dfrac{19}{4}$;

$t=5ln\dfrac{19}{4}\approx 7{,}8\approx 8$ (თვე).

1 $A=Pe^{rt}$;

$25\,000=10\,000e^{rt}$, $t=10$;

$e^{10r}=2{,}5$;

$r=\dfrac{ln2{,}5}{10}\approx\dfrac{0{,}91629}{10}\approx 0{,}09=9\%$.

2 $r=0{,}1$;

$A=Pe^{0{,}1t}$;

თუ $t=2$, $\dfrac{A}{P}=e^{0{,}2}\approx 1{,}22$.

გაიზრდება მიახლოებით 1,22-ჯერ, ანუ 22%-ით.

3 პირობის თანახმად,

$Q(60)=\dfrac{1}{2}C$, ამიტომ $\dfrac{1}{2}C=Ce^{60k}$,

$\dfrac{1}{2}=e^{60k}$, $-ln2=60k$,

$k=-\dfrac{ln2}{60}=-\dfrac{0{,}69315}{60}\approx -0{,}012$;

80%-ით შემცირება ნიშნავს, რომ დარჩება საწყისი რაოდენობის $\dfrac{1}{5}$:

$\dfrac{1}{5}C=Ce^{kt}$.

$e^{kt}=\dfrac{1}{5}$, $kt=-ln5$,

$t=\dfrac{-ln5}{-0{,}012}\approx\dfrac{1{,}60944}{0{,}012}\approx 134$ (დღე).

4 $P=105300e^{0{,}015t}$.

$150\,000=105\,300\,e^{0{,}015t}$; $e^{0{,}015t}\approx 1{,}4245$;

$t\approx\dfrac{ln1{,}4245}{0{,}015}\approx\dfrac{0{,}353821}{0{,}015}\approx 23{,}6\approx 24$ (წელი);

2022+24=2046, მიახლოებით 2046 წელს.

5 $N=100e^{kt}$. როცა $t=0$, მაშინ $N=100$; როცა $t=5$, მაშინ $N=300$;

$100e^{5k}=300, \quad e^{5k}=3, \quad k=\frac{ln3}{5}\approx\frac{1,0986}{5}\approx 0,22.$

გაორკეცდება, როცა $N(t)=2N(0), \quad 100e^{kt}=200,$

$t=\frac{ln2}{k}\approx 3$ (სთ).

6 ა) $\begin{cases} y(0)=1 \\ y(4)=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} Ce^{0}=1 \\ Ce^{4k}=10. \end{cases}$

$C=1; \quad k=\frac{ln10}{4}.$

დ) $\begin{cases} y(0)=5 \\ y(3)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=5 \\ Ce^{3k}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=5 \\ k=\frac{-ln5}{3}. \end{cases}$

კომპლექსური დავალების შესრულება დაეხმარება მოსწავლეებს კარგად გააზრონ სამიზნე ცნებები — შესაბამისობა, გრაფიკი, ფუნქცია, დამოკიდებულება სიდიდეებს შორის; განივითარონ და გაიმყარონ სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებების ფორმულებით გამოსახვის ჩვევები, ფორმულების შედგენისა და გამოყენების უნარები. კომპლექსურ დავალებაში დასმული ამოცანის ამოხსნა ყველა მოსწავლემ უნდა შეძლოს. ბევრი უფრო რთული ამოცანა შეხვდათ მათ, განსაკუთრებით, ბოლო პარაგრაფის ამოხსნისას. კომპიუტერის გამოყენებით, მოსწავლეები შეძლებენ კოვიდ-19-ის გავრცელების გრაფიკული გამოსახულებების მოძიებას, შეამჩნევენ, რომ საწყის ეტაპზე გავრცელებას ექსპონენციალური ზრდის ხასიათი ჰქონდა. მნიშვნელოვანია, რომ, აღწერის უკეთ დასახასიათებლად ლოგარითმული მასშტაბიც არის გამოყენებული; ლოგარითმული სკალა გამოიყენება სიდიდეთა დიდი დიაპაზონების შემთხვევაში; ლოგარითმულ სკალაზე მონაკვეთის სიგრძე პროპორციულია იმ სიდიდეთა შეფარდების ლოგარითმის, რომლებიც ამ მონაკვეთის ბოლოებით არის წარმოდგენილი. ჩვეულებრივ სკალაზე მონაკვეთის სიგრძე აღნიშნული სიდიდეების სხვაობის პროპორციულია. მოსწავლემ შეიძლება წარმოადგინოს სხვადასხვა ქვეყანაში საწყის ეტაპზე თვეების მიხედვით კოვიდ-19-ის შემთხვევათა ზრდის ტენდენციები, გადმოიტანოს პლაკატზე შესაბამისი გრაფიკები და იმსჯელოს ამ გრაფიკების მიხედვით.

მოხსენებაში შეიძლება იმ ამოცანების გამოყენებაც, რომლებიც სასკოლო სახელმძღვანელოშია მოცემული; მაგალითად, საბანკო საქმეში ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ფუნქციების გამოყენება. სასურველია, მოხსენებაში ლოგარითმების წარმოშობის ისტორიის ჩართვაც. საჭირო იქნება ჯონ ნეპერის მოღვაწეობის შესახებ ინფორმაციის მოძიება. მან, პირველმა, გამოაქვეყნა ლოგარითმების ცხრილები, რომლებსაც გასაოცარი ცხრილები უწოდა (1614 წელს). ამ ნაშრომში მოკლედ იყო აღწერილი ლოგარითმები და მისი თვისებები, აქვე იყო სინუსების, კოსინუსების და ტანგენსების ცხრილები. ტერმინი „ლოგარითმი“ ასევე ნეპერის მიერაა შემოღებული. შემოთავაზებული ამოცანა კი ასე იხსნება:

თუ A საწყისი თანხაა, მაშინ n წლის შემდეგ გვექნება:

$A(1+\frac{12}{100})^n$ (ლარი);

$20\,000=10\,000(1+\frac{12}{100})^n$, $\qquad 2=(1+\frac{12}{100})^n$.

შეიძლება 10-ის ფუძით ვისარგებლოთ:

$$n=log_{1,12}2=\frac{lg2}{lg(1,12)}=\frac{0,3010...}{0,0492...}\approx 6,11\approx 6.$$

მოსწავლე იყენებს ამოცანებს ბიოლოგიიდან, რომლებიც სახელმძღვანელოშია მოცემული; აღწერს მათ ამოხსნებს.

შეიძლება საუბარი გაგრძელდეს ლოგარითმების გამოყენებაზე ქიმიაში, ფიზიკაში, მოსახლეობის ზრდის პროგნოზირებაში.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

საკითხები: მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები; თვისებები, გრაფიკები, გამოყენებები.

მკვიდრი წარმოდგენები: მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნისას ვიყენებთ ამ ფუნქციების თვისებებს, გრაფიკულ წარმოდგენებს; სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებები შეიძლება აღიწეროს ფორმულებით, გრაფიკებით.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებების ალგებრული და გეომეტრიული სახით წარმოდგენა; ფორმულების გამოყენება სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებების აღსაწერად.

მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად:

1 რადგან $f(x)=\left(\frac{1}{a-\sqrt{17}}\right)^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქცია კლებადია, ამიტომ ფუძე 1-ზე ნაკლები დადებითი რიცხვია, მაშასადამე, $a-\sqrt{17}>1$, $a>\sqrt{17}+1$.

2 ბ) $\sqrt[3]{5^5}=5^{\frac{5}{3}}$.
$(0,2)^{-1\frac{1}{3}}=5^{\frac{4}{3}}$, $5^{\frac{5}{3}}=5^{\frac{4}{3}}$. ამრიგად, $\sqrt[3]{5^5}>(0,2)^{-1,(3)}$.

3 $1=log_a 9$; $a=9$.

4 ა) $2^{x+log_2 5}=80$, $\quad 2^x\cdot 5=80$, $\quad 2^x=16$, $\quad x=4$;
ბ) $log_{\frac{1}{3}}(x^2+6)=-4$, $\quad x^2+6=3^4$, $\quad x^2=81-6$, $\quad x^2=75$,
$x=5\sqrt{3}$ ან $x=-5\sqrt{3}$.

5 $\frac{1}{3}(log_2x+2log_2y)+5log_2p-log_4q=log_2\sqrt[3]{xy^2}+log_2p^5-log_2q^{\frac{1}{2}}=log_2\frac{\sqrt[3]{xy^2}\cdot p^5}{\sqrt{q}}$.

6 $2log_9\sqrt{21}-4log_3\sqrt[8]{7}=log_3\sqrt{21}-log_3\sqrt{7}=log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$.

7 $log_2(x-1)>log_2\frac{1}{7}$;

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1>\frac{1}{7}, \qquad x>\frac{8}{7}. \end{cases}$$

8 $log_5^2(2x+5)+log_{0,2}(2x+5)-2=0$

$log_5^2(2x+5)-log_5(2x+5)-2=0$

$log_5(2x+5)=2$ ან $log_5(2x+5)=-1$

$2x+5=25, \quad x=10$

ან

$2x+5=\frac{1}{5}, \quad x=-\frac{12}{5}$.

9 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=y, \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}=y^2$,

$y^2-7y+10\geq 0$,

$y\geq 5$ ან $y\leq 2$,

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\geq 5, \quad 2^{-x-1}\geq 5, \quad 2^{-x}\geq 10, \quad -x\geq log_2 10, \quad x\leq -log_2 10$,

ან

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\leq 2, \quad 2^{-x}\leq 4, \quad -x\leq 2, \quad x\geq -2$.

10 $Pe^{0,12t}-P>50\,000, \qquad t=10$;

$P(e^{1,2}-1)>50\,000$

$P>\frac{50\,000}{e^{1,2}-1}\approx 21550,64$;

$P\geq 21551$.

შეაფასეთ თქვენი შედეგი

1 ამოცანაში ფუნქციის კლებადობის არსის ცოდნით თქვენ დაიმსახურებთ 0,5 ქულას, წილადური და მაჩვენებლიანი ფუნქციების ზრდადობისა და კლებადობის განხილვით — კიდევ 1 ქულას, საძიებელი სიმრავლის დადგენით — კიდევ 0,5 ქულას. ამოცანა 2-ქულიანია.

2 ამოცანის თითოეულ დავალებაში გამოსახულებების ერთ ფუძეზე დაყვანით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას, მაჩვენებლიანი ფუნქციის ზრდადობის (კლებადობის) ცოდნით და მისი გამოყენებით — კიდევ 0,5 ქულას. ამრიგად, ამოცანა 2-ქულიანია.

3 ამოცანაში მითითებულ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის განხილვითა და *a*-ს პოვნით დაიმსახურებთ 1 ქულას. ცხრილის სწორად შევსებით — კიდევ 1,5 ქულას. ამოცანა 2,5-ქულიანია.

(4) ამოცანის ა) დავალებაში ხარისხის თვისებებისა და ლოგარითმული იგივეობის გამოყენებით განტოლების გამარტივებით დაიმსახურებთ 1 ქულას, მიღებული მაჩვენებლიანი განტოლების ამოხსნით — კიდევ 0,5 ქულას. ბ) დავალებაში მოცემული განტოლების კვადრატულ განტოლებაზე დაყვანით დაიმსახურებთ 1 ქულას, მისი ამოხსნით — კიდევ 0,5 ქულას. ამოცანა 3-ქულიანია.

(5) და (6) ამოცანებში ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით დავალების შესრულება მოგანიჭებთ 2-2 ქულას. ეს ამოცანები 2-ქულიანებია.

(7) ამოცანაში ლოგარითმული ფუნქციის თვისებების (ზრდადობა-კლებადობა, ახალ ფუძეზე გადასვლა, განსაზღვრის არის დადგენა) გამოყენებით უტოლობის ამოხსნაში დაიმსახურებთ 2 ქულას.

(8) ამოცანის დაკავშირება კვადრატული განტოლების ამოხსნასთან შეფასდება 1 ქულით, კვადრატული განტოლების ამოხსნა — კიდევ 0,5 ქულით, მარტივი ლოგარითმული განტოლებების ამოხსნა — კიდევ 0,5-0,5 ქულით. ამოცანა 2,5-ქულიანია.

(9) ამოცანაში გამოსახულებათა ერთ ფუძეზე დაყვანა შეფასდება 0,5 ქულით, კვადრატული უტოლობის ამოხსნა — კიდევ 0,5 ქულით, მაჩვენებლიანი უტოლობების ამოხსნა — თითო ქულით. ამოცანა 3-ქულიანია.

(10) ამოცანაში უწყვეტი დარიცხვის ფორმულის ცოდნით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას, მოსალოდნელი სარგებლის ფორმულის დადგენით — კიდევ 0,5 ქულას. საწყისი თანხის დადგენით — კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 2-ქულიანია.

რამდენი ქულა მიიღეთ?

21-23 ქულა — დავალება შესრულებულია ძალიან კარგად (შეფასება მაღალია);
17-20 ქულა — დავალება შესრულებულია კარგად (შეფასება საშუალოზე მაღალია);
12-16 ქულა — დავალება შესრულებულია ნაწილობრივ (შეფასება საშუალოა);
12 ქულაზე ნაკლები ქულის შემთხვევაში გჭირდებათ უფრო გულმოდგინე მუშაობა (შეფასება დაბალია).

V თავის დამატებითი ამოცანები

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

(1) დარიცხული თანხის გამოსათვლელად ვიყენებთ ფორმულას: $S=Prn$, სადაც, $P=10\,000$ საწყისი თანხაა, $r=0{,}08$ — დარიცხვის პროცენტი, გამოსახული ათწილადით, $n=3$ — წლების რაოდენობა.

$S=10\,000\cdot 0{,}08\cdot 3=800\cdot 3=24000$ (ლარი).

(2) $S=P(1+r)^n-P$;

$P=10\ 000, \quad n=3, \quad r=0{,}06;$

$S=10\ 000(1{,}06^3-1)\approx 1910{,}2$ (ლარი).

(3) $0{,}2=a\cdot\frac{1}{9}, \quad a=1{,}8;$

$y=1{,}8\cdot 3^x.$

$x=0,\ y=1{,}8.$

(4) ზრდადია, როცა $2a+3>1$; კლებადია, როცა $0<2a+3<1$; ამოსახსნელია ეს მარტივი უტოლობები.

(5) როცა $x=1$, $y=4-1=3$, $b=3$; $(1;\ 3)$ წერტილი $y=a^x$-ის გრაფიკსაც ეკუთვნის: $3=a^1$, $a=3$.

(6) დ) $log_{0,2}(5x^2-55)=-3, \qquad 5x^2-55=125, \qquad x^2=36, \quad x=\pm 6.$

(8) დ) $log_{\frac{1}{4}}(4x+5)<-2;$

$$\begin{cases}4x+5>0\\4x+5>16;\end{cases}$$

$4x>11, \quad x>\frac{11}{4}.$

(9) ა) და გ) ტოლფასი განტოლებებია.

$|x-4|=3;$

$x-4=3, \quad x=7$ ან $x-4=-3,\ x=1.$

(11) ე) $\dfrac{log_3 5^{2+\frac{1}{3}}}{log_3 5}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$

(12) გ) $3^{log_2 5}-5^{log_2 3}.$

$3^{log_2 5}=5^{log_2 3}$, რადგან $log_2(3^{log_2 5})=log_2(5^{log_2 3}).$

მაშასადამე, ამ რიცხვების სხვაობა ნულის ტოლია.

საზოგადოდ, თუ $a>0$, $b>0$, $c>0$, $b\neq 1$, მაშინ $a^{log_b c}=c^{log_b a}.$

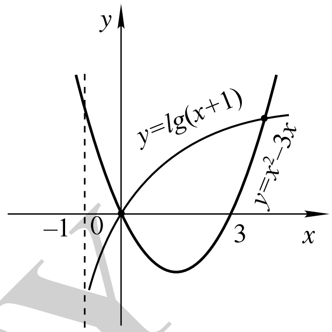
დ) $log_3 8\cdot log_2 9=3log_3 2\cdot 2\cdot log_2 3=6$, რადგან $log_3 2=\dfrac{1}{log_2 3}.$

ე) $\dfrac{9^{log_4 25}}{25^{log_2 3}}=\dfrac{3^{2log_2 5}}{5^{2log_2 3}}=\left(\dfrac{3^{log_2 5}}{5^{log_2 3}}\right)^2=1.$

აქაც, გ) დავალების მსგავსად, გამოვიყენეთ ფორმულა: $a^{log_b c}=c^{log_b a}.$

13 უნდა დავალაგოთ ზრდის მიხედვით რიცხვები: $ln\frac{25}{4}$, $lg10^{\frac{5}{2}}$, $-log_2 10$, 0 და 4.

მივიღებთ: $-log_2 10=log_{0,5}10$; 0; $ln\frac{25}{4}\in(1;\ 2)$; $ln100\sqrt{10}=\frac{5}{2}$; $2^{2ln2}=4$.



15 ბ) $lg(x+1)=x^2-3x$ განტოლებას ორი ფესვი აქვს, ერთი 0-ის ტოლი, მეორე 3-ზე მეტი.

16 $lg125=3lg5=3lg\frac{10}{2}=3-3lg2=3-3a$.

17 დ) $\sqrt{5^{x-17}}-2\sqrt{5^{x-19}}=3$,

ვთქვათ, $\sqrt{5^{x-19}}=y$, მაშინ $\sqrt{5^{x-17}}=\sqrt{5^{x-19}\cdot 5^2}=5\sqrt{5^{x-19}}$.

მივიღებთ:

$5y-2y=3,\quad 3y=3,\quad y=1;$

$\sqrt{5^{x-19}}=5^0,\ x=19.$

18 ა) $5^{log_5(3x-1)}=x+1;$

$3x-1=x+1,\quad 2x=2,\quad x=1.$

გ) $3\cdot 9^x-4\cdot 6^x+4^x=0$; გავყოთ 6^x-ზე.

$3\left(\frac{3}{2}\right)^x-4+\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x=y$

$3y-4+\frac{1}{y}=0,\quad 3y^2-4y+1=0,\quad \frac{D}{4}=1,\ y=\frac{2\pm1}{3},\quad y_1=1,\quad y_2=\frac{1}{3}.$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x=1,\ x=0;$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{1}{3},\ x=log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{3}=-log_{\frac{3}{2}}3.$

19 $\begin{cases} x>0 \\ log_2 x\geq 0 \\ log_2 x\neq 4 \end{cases}\quad\Bigg|\quad \begin{matrix} \\ x\geq 1 \\ x\neq 16 \end{matrix}$

$[1;\ 16)\cup(16;\ +\infty).$

(20) $-x>0$, $x<0$; მოცემული უტოლობა გადავწეროთ ასე:
$4lg^2(-x)-lg(-x)-5>0.$

$4y^2-y-5>0$, $y=\frac{1\pm9}{8}$, $y_1=\frac{5}{4}$, $y_2=-1$;

$lg(-x)>\frac{5}{4}$, $-x>10^{\frac{5}{4}}$, $x<-10^{\frac{5}{4}}$;

ან $lg(-x)<-1$, $-x<\frac{1}{10}$, $x>-\frac{1}{10}$; ამასთანავე $x<0$.

მივიღეთ $(-\infty; -10^{\frac{5}{4}})\cup(-\frac{1}{10}; 0)$.

$x^2\leq400$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $[-20; 20]$.

პასუხი: $[-20; -10^{\frac{5}{4}})\cup(-\frac{1}{10}; 0)$.

(21) ბ) $8000(1+0,1)^n>20\ 000$;

$1,1^n>\frac{5}{2}$;

$n>\frac{ln2,5}{ln1,1}\approx9,6.$

10 წლის შემდეგ.

(22) $Pe^{0,034t}=7500$, $t=5$;

$Pe^{0,17}=7500$;

$P=\frac{7500}{e^{0,17}}\approx6\,327,5$ (ლარი).

შემაჯამებელი წერა №6

თემატური ბლოკი: მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები.
საამიზნე ცნებები: შესაბამისობა, ფუნქცია, სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება, გრაფიკი, განტოლება, უტოლობა..

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების თვისებების გამოყენება განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნისას, საბანკო საქმესთან დაკავშირებული ამოცანების გადაწყვეტისას.

ამოცანების ნიმუშები
ამოხსენით ამოცანები:

(1) (16; 4) წერტილი ძევს $y=log_ax$ ფუნქციის გრაფიკზე. იპოვეთ a.

(2) a-ს რა მნიშვნელობებისთვის არის $y=(5a-1)^x$ ფუნქცია კლებადი?

(3) გამოთვალეთ: ა) $log_55\sqrt{5}+log_327$;

ბ) $3lg5+2lg2\sqrt{2}$.

4 ამოხსენით განტოლება:

ა) $3^{\log_3 x+2}=45$; ბ) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)=-2$; გ) $lg(x-6)^2=2$; დ) $\sqrt{3^{2x-5}}+\sqrt{3^{2x-9}}=10\sqrt{3}$.

5 ამოხსენით უტოლობა $\log_{0,2}(x-1)>-2$.

6 ბარბარემ იცის, რომ ბანკში ანაბარზე სარგებლის რთული პროცენტის დარიცხვის წესით წლიური საპროცენტო განაკვეთია 3,4%. სულ ცოტა რამდენი ლარი უნდა შეიტანოს მან ბანკში, რომ 6 წლის შემდეგ დაგროვილმა თანხამ შეადგინოს არანაკლებ 25 000 ლარი?

პასუხები: 1 $a=2$. 2 (0,2; 0,4). 3 ა) 4,5; ბ) 3. 4 ა) $x=5$; ბ) $x=3,5$; გ) $x=16$; $x=-4$; დ) $x=5$. 5 (1; 26). 6 სულ ცოტა 20456 ლარი.

მითითებები:

4 გ) $lg(x-6)^2=2$; $2lg|x-6|=2$; $|x-6|=10$, საიდანაც $x=16$ ან $x=-4$.

დ) შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\sqrt{3^{2x-5}}=y$, ან $\sqrt{3^{2x-9}}=y$. მიიღება, შესაბამისად, განტოლება $y+\frac{y}{9}=10\sqrt{3}$, ან $9y+y=10\sqrt{3}$.

5 უნდა ამოიხსნას სისტემა: $\begin{cases} x-1>0 \\ x-1<25. \end{cases}$

6 ვისარგებლოთ ფორმულით: $P=P_0(1+r)^n$, სადაც $n=6$, $P=25000$, $r=\frac{3,4}{100}$. საძიებელია P_0-ის უმცირესი მნიშვნელობა, რომ

$$P_0 \geq \frac{25000}{1,034^6} \approx 20455,8.$$

უნდა შეიტანოს სულ ცოტა 20456 ლარი.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

გთავაზობთ შემდეგ შეფასებებს:

1 სწორი ამოხსნა შეფასდეს 1 ქულით.

2 ამოხსნა 0,5 ქულით შეფასდეს, თუ მოსწავლემ შენიშნა, რომ $0<5a-1<1$, თუმცა ვერ ამოხსნა ორმაგი უტოლობა; ან ბოლომდე ამოხსნა მხოლოდ $5a-1<1$ უტოლობა. უშეცდომო ამოხსნა შეფასდეს 1 ქულით.

3 ა) და ბ) დავალებებიდან თითოეულის სწორი ამოხსნა შეფასდეს 1 ქულით. სულ — 2 ქულა.

(4) ა) 0,5 ქულით შეფასდეს $a^{\log_a b}=b$ ფორმულის გამოყენებით განტოლების გამარტივება; მიღებული განტოლების ამოხსნა — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 1 ქულა.

ბ) წრფივი განტოლების მიღება შეფასდეს 0,5 ქულით, მიღებული განტოლების ამოხსნა — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 1 ქულა.

გ) თუ მოსწავლემ არ გაითვალისწინა x–6-ის ორივე მნიშვნელობა და განტოლება ამოხსნა მხოლოდ $x-6>0$ შემთხვევისთვის, შეფასდეს 1 ქულით. განტოლების ორივე ფესვის პოვნა — 2 ქულით.

დ) ამოხსნა 1 ქულით შეფასდეს, თუ მოსწავლემ აღნიშნა $\sqrt{3^{2x-5}}$ და $\sqrt{3^{2x-9}}$ გამოსახულებებიდან ერთ-ერთი და მეორე გამოსახა ახალი ცვლადით; კიდევ 0,5 ქულა დაემატოს ახალი ცვლადის მნიშვნელობების პოვნისთვის და 0,5 ქულა — საბოლოო პასუხის დაფიქსირებისთვის.

იმ შემთხვევაში, თუ მოსწავლემ 3^{2x} ან $\sqrt{3^{2x}}$ აღნიშნა ახალი ცვლადით და მის მიმართ შეადგინა განტოლება, მაგრამ ის ვერ ამოხსნა, ვისარგებლოთ 0,5 ან 1-ქულიანი შეფასებით.

(5) თუ მოსწავლემ ამოხსნა უტოლობა განსაზღვრის არის გათვალისწინების გარეშე, ან გაითვალისწინა განსაზღვრის არე, მაგრამ არ შეცვალა უტოლობის ნიშანი, შეფასდეს 1 ქულით. სწორად ამოხსნილი უტოლობა — 2 ქულით.

(6) 1 ქულით შეფასდეს $P=P_0(1+r)^n$ ფორმულაში შესაბამისი მნიშვნელობების ჩასმა და კიდევ 1 ქულა დაემატოს მიღებული განტოლების (ან უტოლობის) ამოხსნისთვის და პასუხის დაფიქსირებისთვის.

შეგროვდა სულ 14 ქულა. იმისათვის, რომ მოსწავლე შევაფასოთ 10 ქულიანი სისტემით, მის მიერ დაგროვილი ქულების ჯამი გავამრავლოთ $\frac{10}{14}$-ზე და შედეგი დავამრგვალოთ ერთეულის სიზუსტით. ამ მეთოდის გამოყენებით მასწავლებელს ეძლევა შესაძლებლობა უფრო დეტალურად შეაფასოს ნაშრომში დაფიქსირებული ყოველი რაციონალური მოქმედება და წინასწარვე არ შეიზღუდოს 10-ქულიანი შეფასებით.

მეოთხე თავის შემაჯამებელი წერის შედეგების ანალიზით შესაძლებელია საყურადღებო დასკვნები გაკეთდეს განხილული საკითხების შესახებ მოსწავლეთა ცოდნისა და მისი გამოყენების უნარების შესახებ. არანაკლებ მნიშვნელოვანია, რომ ეს ვითარება შემდგომი თემების შესწავლის ხარისხზეც აისახება. ეს ფაქტორი კიდევ უფრო აღრმავებს ამ აქტივობის შემდგომ ჩასატარებელი განმავითარებელი შეფასების მნიშვნელობას. თქვენი მოსწავლეების ინდივიდუალურ თვისებათა და მათი აკადემიური მზაობის ცოდნა ხელს შეგიწყობთ უკეთ მოარგოთ ჩვენი რეკომენდაციები განმავითარებელი შეფასების შესახებ თქვენს სასწავლო პროცესს, თქვენს უაღრესად მნიშვნელოვან საგანმანათლებლო მუშაობას.

ჩვენი რეკომენდაციების ძირითადი იდეაა: საკითხების საჯარო, შემოქმედებითი, ინტერაქტიული განხილვით მკაფიო აქცენტი გაკეთდეს განხილულ სამიზნე ცნებათა და მეთოდთა არსის წვდომაზე, ცოდნის გაღრმავებაზე, თემის გამოყენებითი ასპექტების გათავისებაზე მოსწავლეთა მიერ.

(1) ამოცანაში კიდევ ერთხელ უნდა გაესვას ხაზი: როგორ შევამოწმოთ მოცემული წერტილი ეკუთვნის თუ არა მოცემულ წირს, ან არეს? იქნებ თავად დაასახელონ წერტილები, რომლებიც ეკუთვნის ან არ ეკუთვნის მოცემულ გრაფიკს. აქვე არსებითია ლოგარითმის ცნების განსაზღვრის განხილვაც.

(2) ამოცანაშიც აუცილებელია კლასმა გაიხსენოს რაიმე შუალედში ფუნქციის ზრდადობა-კლებადობის (მონოტონურობის) ცნებები, ყურადღება გამახვილდეს შუალედის საზღვრის წერტილების მიმართაც. გაამახვილეთ ყურადღება: მაგალითად, ზრდადობის შუალედი არგუმენტის მნიშვნელობათა სიმრავლეს გულისხმობს და არა თავად ფუნქციის მნიშვნელობების; დაიხმარეთ მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები, გრაფიკები 1-ზე მეტი და 1-ზე ნაკლები (დადებითი) ფუძის შემთხვევაში.

(3) ამოცანის განხილვისას კლასმა უნდა გაიხსენოს და წარმოადგინოს ლოგარითმის თვისებები და მიუსადაგოს მოცემულ კონკრეტულ დავალებებს.

(4) ამოცანაში კვლავ მივუბრუნდეთ ხარისხისა და ლოგარითმის თვისებებს. კლასი გაიხსენებს მოცემული ტიპის განტოლებათა ამოხსნის ხერხებს. ხარისხის ლოგარითმის გამარტივებისას ტიპური შეცდომაა ფუძის მოდულის გაუთვალისწინებლობა, სასურველია კონკრეტული მაგალითების განხილვით შესაძლო შეცდომათა თავიდან აცილება; ყურადღება უნდა გამახვილდეს ლოგარითმული განტოლების ამოხსნისას მიღებული შედეგის შემოწმების მნიშვნელობაზეც.

(5) ამოცანაში არსებით მნიშვნელობას იძენს განსაზღვრის არის გათვალისწინება. კიდევ ერთხელ ჩაუღრმავდით უტოლობათა სისტემის ამოხსნის არსს — მისი ამონახსნია სისტემის უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეების თანაკვეთა.

(6) ამოცანას და ანალოგიურ ამოცანებს ფინანსური სფეროდან დიდი პრაქტიკული და განმავითარებელი მნიშვნელობა აქვს, კერძოდ, ასეთია რთული პროცენტის დარიცხვის წესით ანაბრის გახსნასთან დაკავშირებული არატრივიალური ამოცანები, მათში წარმოდგენილი საწყისი და დაგროვილი თანხების დამაკავშირებელი ფორმულები. ხაზი უნდა გაესვას ამ ფორმულებში საპროცენტო განაკვეთის წარმოდგენას ათწილადით გამოსახული ნაწილის სახით.

განმავითარებელი შეფასება უნდა გულისხმობდეს მოსწავლეთა მოსაზრებების ანალიზსაც შემაჯამებელი წერის ამოცანათა შესახებ, მთელი დავალების სირთულის დონისა და მოცულობის შესახებ. ეს ინფორმაცია უთუოდ გამოგადგებათ მუშაობაში.

მეოთხე თავის შემაჯამებელი წერისა და განმავითარებელი შეფასების შედეგების მიხედვით შეიძლება ასე დავაკონკრეტოთ სოლო ტაქსონომიის ზოგადი ფორმით წარმოდგენილი მოსწავლეთა აკადემიური დონეები.

1. პრესტრუქტურული დონე. მოსწავლეს არამკაფიო წარმოდგენა აქვს განხილულ სამიზნე ცნებებზე, თავად საკითხებზე, არ შეუძლია მკაფიო პასუხის გაცემა დასმულ კითხვაზე, ვერ ერკვევა არსებულ ანალიზურ და გეომეტრიულ წარმოდგენებში.

2. უნისტრუქტურული დონე. ზოგჯერ ახერხებს მარტივი საკითხების განხილვაში ჩართვას მხოლოდ დასკვნით ეტაპზე — ინსტრუქციების გაცნობის შემდეგ და გამოთვლების შესრულებისას. იყენებს ტერმინებს, თუმცა ზუსტი არსი სამიზნე ცნებებისა არ აქვს გაცნობიერებული.

3. მულტისტრუქტურული დონე. შეუძლია ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ფუნქციების გრაფიკების წარმოდგენა, თუმცა ვერ აღწერს მჭიდრო კავშირს ამ ფუნქციებს, მათ გრაფიკებს შორის. იცის, რა მეთოდები არსებობს, მაგალითად, ლოგარითმული განტოლების ამოხსნის, თუმცა კონკრეტულ ამოცანებში ზოგჯერ უჭირს ამ ცოდნის გამოყენებით ამოცანის ბოლომდე გადაჭრა.

4. მიმართებითი დონე. მოსწავლეს გააზრებული აქვს განხილული სამიზნე ცნებების შინაარსი; აღწერს და ახასიათებს ლოგარითმულ და მაჩვენებლიან ფუნქციებს და წარმოაჩენს მათ ურთიერთკავშირს; იცის და პრაქტიკულად იყენებს დასმულ ამოცანათა ამოხსნის მეთოდებს, აანალიზებს მიღებულ შედეგებს და მკაფიოდ გადმოსცემს მათ.

5. გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. მოსწავლეს ღრმად აქვს გააზრებული სამიზნე ცნებათა შინაარსი. აღწერს ლოგარითმულ და მაჩვენებლიან ფუნქციებს ურთიერთკავშირში, ზოგადად, ფუნქციათა თვისებების კონტექსტში; ამახვილებს ყურადღებას ამ ორი ფუნქციის სპეციფიკურ თვისებებზე; დავალებათა განხილვისას კრიტიკულად აღიქვამს გამოთქმულ მოსაზრებებს და თავად იძლევა კვლევის ნიმუშს. მისი მსჯელობა გამოირჩევა მრავალმხრივი ანალიზით, არის მკაფიო და დამაჯერებელი.

VI თავი

გეომეტრიის აგებულების, დასაბუთების ხერხებისა და მათში ლოგიკის გამოყენების შესახებ

თემები: სიმრავლე, რიცხვები. მიმართებები სივრცეში წრფეებს შორის, სიბრტყეებს შორის, წრფესა და სიბრტყეს შორის.

საათების სავარაუდო რაოდენობა: 18 სთ

თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: სიმრავლე, რიცხვითი სიმრავლეები; აქსიომა, თეორემა, თეორემის დამტკიცება, სტერეომეტრის საწყისები.

სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	კომპლექსური დავალება
სიმრავლე, რიცხვები, რიცხვებზე მოქმედებები; გეომეტრიული ობიექტები და მათ შორის კავშირები. ამოცანების ფორმულირება შეიძლება სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებით; სიმრავლეებზე მოქმედებებით შეიძლება აღიწეროს ცნებებს შორის კავშირები. სივრცული გეომეტრიული ფიგურები — წრფე და სიბრტყე სივრცეში; სტერეომეტრიის აგება იწყება აქსიომებისა და საწყისი ცნებების ჩამოყალიბებით; გეომეტრიული ფაქტები მტკიცდება ლოგიკის წესების გამოყენებით — ლოგიკური გამომდინარეობის გამოყენებით.	სიმრავლე, რიცხვითი სიმრავლეები. წრფეების პარალელურობა სივრცეში, წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა, წრფისა და სიბრტყის მართობულობა, მართობულობის პირობა; სამი მართობის თეორემა.	რა სახის ათწილადით ჩაიწერება რაციონალური რიცხვი? რა სახის ათწილადით შეიძლება ჩავწეროთ ირაციონალური რიცხვი? რა სახით ვაყალიბებთ და ვამტკიცებთ გეომეტრიულ დებულებებს? რას ვიყენებთ თეორემების დამტკიცებისას?	სტერეომეტრიის თვისებები და მათი პრაქტიკული გამოყენებები.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს ამოცანების ფორმულირება სიმრავლეთა თეორიაზე დაყრდნობით; ცნებებს შორის კავშირების წარმოდგენა ვენის დიაგრამებით; სიდიდეების ჩაწერა რიცხვითი მახასიათებლების საშუალებით; რეალურ ცხოვრებაში გეომეტრიული ფიგურების ამოცნობა, აღწერა, კლასიფიკაცია, გეომეტრიული ობიექტების განსაზღვრებათა და თვისებათა სწორად ჩამოყალიბება და პრაქტიკულ ამოცანებში გამოყენება; გეომეტრიული ობიექტის ზომის (სიგრძე, ფართობი, მოცულობა) გამოთვლა (მათ. საშ. 4).

პირველი თავის ძირითადი თემებია: სიმრავლეები, მიმართებები მათ შორის; მიმართებები სივრცეში წრფეებს შორის, სიბრტყეებს შორის, წრფესა და სიბრტყეს შორის; ლოგიკის გამოყენება დებულებების (მათ შორის გეომეტრიული დებულებების) დასაბუთებისას. მოსწავლეები ამ საკითხების შესწავლის პარალელურად, მუშაობენ კომპლექსური დავალების შესრულებაზე.

6.1 სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები. რიცხვითი სიმრავლეები

სასწავლო მასალის საფუძველს თეორიულ-სიმრავლური მიდგომა ქმნის. შესაბამისად, გავლილი მასალის გამეორება სიმრავლეთა თეორიისა და რიცხვითი სიმრავლეების განხილვით იწყება.

პირველი პარაგრაფი ეძღვნება სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი ცნებების, რიცხვითი სიმრავლეებისა და მათ შორის მიმართებების გამეორებას. პირველი გაკვეთილი შეიძლება დავიწყოთ სიმრავლის ცნებაზე წარმოდგენისა და სიმრავლეებზე მოქმედებების გამეორებით; სიმრავლის მოცემის ხერხების აღწერა მოსწავლეების ჩართულობით უნდა მიმდინარეობდეს. მოსწავლეები ასახელებენ სიმრავლეების მოცემის სხვადასხვა შემთხვევას: სასრული სიმრავლის მოცემა ელემენტების ჩამოთვლით, სიმრავლის მოცემა მახასიათებელი თვისების მითითებით. გამეორების პროცესი ამოცანების ამოხსნის პარალელურად უნდა გაგრძელდეს; მაგალითად, კლასში ამოსახსნელი 1 და 2 ამოცანებით ვიხსენებთ სასრული სიმრავლეების გაერთიანებაში ელემენტების რაოდენობის ფორმულას, უნივერსალური სიმრავლისა და სიმრავლის დამატების ცნებებს, ვხსნით შესაბამის ამოცანებს. ამოცანებშია გადატანილი სიმრავლეებზე მოქმედებების თვისებების დასაბუთებებიც. ამას მოსდევს რიცხვითი სიმრავლეების ($\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$) წარმოდგენა, მათ შორის მიმართებების აღწერით ვაზუსტებთ მოსწავლეების წარმოდგენას რაციონალური რიცხვების ჩაწერის ხერხების შესახებ (წილადი, ათწილადი, უსასრულო პერიოდული ათწილადი); ირაციონალური რიცხვების ჩაწერას უსასრულო არაპერიოდული ათწილადებით. მოსწავლემ უნდა შეძლოს ირაციონალური რიცხვების მაგალითების გახსენება (ფესვებთან დაკავშირებით, π), იმ უსასრულო ათწილადების დასახელება, რომლებიც არაპერიოდულ ათწილადებს წარმოადგენს. რიცხვის ჩაწერის დასახელებული

სხვადასხვა ხერხი უკავშირდება მკვიდრ წარმოდგენებს რიცხვების შესახებ; ირაციონალური რიცხვების შესახებ საუბარი შეიძლება დავასრულოთ ოქროს კვეთის შეფარდების წარმოდგენით — მისი მნიშვნელობა ირაციონალური რიცხვის ახალი მაგალითია.

ამოცანების დაყოფა საკლასო და საშინაო დავალებებად, მათი მრავალფეროვნება, სირთულის მიხედვით დალაგება ხელს უწყობს სამიზნე ცნებების (სიმრავლე, რიცხვი, მოქმედებები სიმრავლეებზე, რიცხვებზე) თანამიმდევრულ გააზრებას; დავალებები შეიცავს პრობლემებს, რომელთა ანალიზი მოსწავლეს სამიზნე ცნებების არსის გააზრებამდე მიიყვანს.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

სიმრავლეებსა და სიმრავლეებზე მოქმედებებს ეხება პარაგრაფის ამოცანების დიდი ნაწილი; ზოგიერთი სიმრავლეებზე მოქმედებების დიაგრამებით გამოსახვის გამოყენებით იხსნება.

1 ამოცანაში ვიყენებთ ორი სასრული სიმრავლის გაერთიანებაში ელემენტების რაოდენობის ფორმულას. შეიძლება მოსწავლემ ამოცანა დიაგრამის გამოყენებითაც ამოხსნას. შემოვიღოთ აღნიშვნები: A — ინგლისურის მცოდნეთა სიმრავლე. შესაბამისად, $n(A)=75$; B — ფრანგულის, $n(B)=50$. პირობის თანახმად, $n(A\cap B)=28$. დაფასთან გამოძახებული მოსწავლე თავად დაასკვნის:

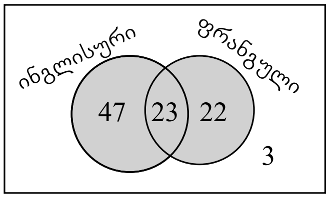
ა) კითხვა ეხება $n(A\cup B)$ რიცხვის პოვნას. $n(A\cup B)=75+50-28=97$.

ბ) ამ კითხვაში მოითხოვება $n(\overline{A\cup B})$ რიცხვის პოვნა: $100-97=3$. მოსწავლემ უნდა შეძლოს ამ რიცხვის ასე წარმოდგენაც: $n(\overline{A}\cap\overline{B})$.

გ) მოსწავლეების უმეტესობა ადვილად მიაგნებს ამოხსნის გზას:

$$n(A\cup B)-n(A\cap B)=97-28=69.$$

ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება აირჩიოს დიაგრამის მითითება:



2 ამ ამოცანის განხილვას უნივერსალური სიმრავლისა და სიმრავლის დამატების ცნებების გახსენებით ვიწყებთ. შემდეგ მოსწავლეები აღწერენ ორი სიმრავლის ტოლობის დადგენის წესს; მაგალითად, $C=D$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი x-ისთვის, რომელიც ეკუთვნის C-ს, გამომდინარეობს, რომ $x\in D$ და, პირიქით, ყოველი x-ისთვის, რომელიც ეკუთვნის D-ს, გამომდინარეობს, რომ $x\in C$, ანუ $C\subset D$ და $D\subset C$.

მაგალითად, (1)-ის დამტკიცება ასე მიმდინარეობს:

ვთქვათ, $x\in\overline{A\cup B}$, მაშინ $x\notin A\cup B$; მაშასადამე $x\notin A$ და $x\notin B$; მაშინ $x\in\overline{A}$ და $x\in\overline{B}$; აქედან, $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$. ახლა, ვთქვათ, $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$, მაშინ $x\in\overline{A}$ და $x\in\overline{B}$; მაშასადამე, $x\notin A$ და $x\notin B$; ამიტომ $x\notin A\cup B$; მაშინ $x\in\overline{A\cup B}$.

ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება არჩიოს, მსჯელობა ვენის დიაგრამით აწარმოოს.

ბ) უნივერსალურ სიმრავლედ შეიძლება ავიღოთ სკოლის მოსწავლეთა სიმრავლე;

A — ინგლისურის შემსწავლელთა სიმრავლე; B — გერმანულის შემსწავლელთა სიმრავლე, C — ფრანგულის შემსწავლელთა სიმრავლე. მაშინ, პირობის თანახმად, $n(U)=1600$, $n(A)=1200$; $n(B)=950$; $n(\overline{A}\cap\overline{B})=50$. უნდა ვიპოვოთ $n(A\cap B)$.

აქ შეიძლება ვისარგებლოთ ფორმულით:

$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$; მაშასადამე, $n(\overline{A\cup B})=50$; ამიტომ $n(A\cup B)=1600–50=1550$.

ახლა ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)–n(A\cap B)$$

$$1550=1200+950–n(A\cap B).$$

ამრიგად, $n(A\cap B)=2150–1550=600$.

(3) ამოცანა წინა ამოცანის ანალოგიურია. ერთ-ერთი დავალება შეიძლება კლასში ერთობლივად ამოვხსნათ; დანარჩენებს მოსწავლეები დამოუკიდებლად ასრულებენ. შედეგები შეიძლება გამოვიყენოთ განმავითარებელი შეფასების განსახორციელებლად. ეს აქტივობა შეიძლება ჯგუფური მუშაობის ფორმით ჩავატაროთ.

დ) შეიძლება მოსწავლემ ასე იმსჯელოს: ვთქვათ, $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$

აქ გვაქვს: $x\in(A\cup C)$ და $x\in(B\cup C)$.

თუ $x\in C$, მაშინ $x\in(A\cap B)\cup C$; თუ $x\notin C$, მაშინ $x\in A$ და $x\in B$. აქედან ვღებულობთ $x\in A\cap B$. მაშასადმე, $x\in(A\cap B)\cup C$.

ახლა, ვთქვათ, პირიქით,

$$x\in(A\cap B)\cup C.$$

მაშინ $x\in A\cap B$ და $x\in C$.

თუ $x\in C$, მაშინ $x\in A\cup C$ და $x\in B\cup C$, საიდანაც $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

თუ $x\notin C$, მაშინ $x\in A\cap B$, საიდანაც $x\in A$ და $x\in B$; შესაბამისად, $x\in A\cup C$ და $x\in B\cup C$, საიდანაც $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

ორივე შემთხვევაში:

$$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

(4) პირობის თანახმად, $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$, $B=\{1;\ 5\}$, $C=\{3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11\}$.

მაშინ, ცხადია,

$A\cup B=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 12\}$, $B\cap C=\{5\}$, $(A\cup B)\cap C=\{3;\ 5\}$, $(A\cap B)\cap C=\{1\}\cap C=\varnothing$.

(5) მოსწავლემ შეიძლება გამოიყენოს ცდისა და შემოწმების ხერხი; მაგალითად, თუ $A=\boldsymbol{N}$, $B=\boldsymbol{Z}$, მაშინ $A\cup B=A$ არ სრულდება; მაგრამ, თუ $A=\boldsymbol{Z}$ და $B=\boldsymbol{N}$, მაშინ $A\cup B=A$ და $A\cap B=B$.

შეიძლება, მსჯელობით, შევამციროთ ცდათა რიცხვი, თუ გავითვალისწინებთ პირობას:

$$\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}. \qquad (1)$$

მაშინ, მაგალითად, $\boldsymbol{Q}\cup\boldsymbol{N}=\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}\cap\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}$.

მაშასადამე, პირობები სრულდება, როდესაც $B\subset A$.

მაგალითად,

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}\end{array}\right|\quad\begin{array}{l}\boldsymbol{R}=A\\ \boldsymbol{Z}=B.\end{array}$$

(7) თუ A-სა და B-ს დაესწრო x მოსწავლე, A-სა და C-ს — y მოსწავლე, B-სა და C-ს — z მოსწავლე, მაშინ, ცხადია, $x+y=25$, $x+z=12$, $y+z=23$; მაშასადამე, $2x+2y+2z=60$, $x+y+z=30$. მოსწავლეების რაოდენობა არის 30.

A-სა და B-ს დაესწრო 30–23=7 (მოსწავლე); A-სა და C-ს — 30–12=18 (მოსწავლე); B-სა და C-ს — 30–25=5 (მოსწავლე).

(8) ამ ამოცანის ამოხსნისას შეიძლება მოსწავლეთა დასახმარებლად მოგვიწიოს კითხვების გამოყენება:

- რა შემთხვევაშია $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$ ტოლობა სწორი?
- რა რიცხვის უმცირეს მნიშვნელობას ვეძებთ? ($n(A\cap B\cap C)$–ის)
- ხომ არ არის უმჯობესი ვიმსჯელოთ $n(\overline{A\cap B\cap C})$ რიცხვის შესახებ?
- რისი ტოლია $n(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})$?

ამოხსნას ვიწყებთ კითხვებზე პასუხების მოფიქრების შემდეგ.

ცხადია, $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A\cap B}\cup\overline{C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

$$n(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})\le n(\overline{A})+n(\overline{B})+n(\overline{C})$$

პირობის თანახმად, $n(\overline{A})=35\%$, $n(\overline{B})=30\%$, $n(\overline{C})=25\%$. მაშასადამე,

$$n(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})\le 90\%$$

$$n(\overline{A\cap B\cap C})\le 90\%$$

$$n(A\cap B\cap C)=100\%-n(\overline{A\cap B\cap C})$$

$$n(A\cap B\cap C)\ge 10\%.$$

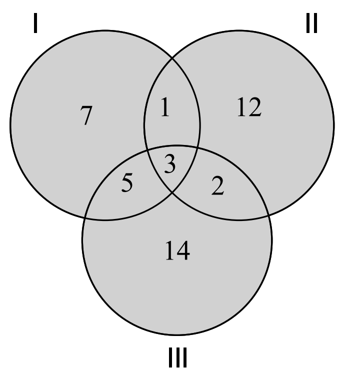
ეს „მეთოდი“ (დამატებით სიმრავლეებზე გადასვლა) ხშირად გამოიყენება კომბინატორულ ამოცანებსა და ალბათობის თეორიაში. ამიტომ, სასურველია, ამოცანის დაწვრილებითი განხილვა; ეს დაეხმარება მოსწავლეებს ამოხსნან ანალოგიური ამოცანა საშინაო დავალებიდან.

(9) თუ $x=4n+2$ ($x\in\boldsymbol{N}$, $n\in\boldsymbol{N}$); ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვი შეიძლება გამოისახოს $3k$, $3k+1$ ან $3k+2$ სახით; სადაც $k=0, 1, 2....$ ე. ი. $x=12k+2$, $x=12k+6$ ან $x=12k+10$.

მაშასადამე, $A\cap B$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი არის $12k+6$ სახის ($k=0, 1, 2...$). ეს რიცხვები ნატურალური k რიცხვით ასე გამოისახება: $12k-6$ ($k\in\boldsymbol{N}$).

(10) მხოლოდ ორი სუვენირი შეუძენია 21–7=14 ტურისტს, მხოლოდ სამი — 29–14=15 ტურისტს. ტურისტთა საერთო რაოდენობაა: 7+14+15=36.

(11) ამოცანის მოცემულობა ვენის დიაგრამით გამოვსახოთ; განხილვას ვიწყებთ სამივე სახეობაში მონაწილეთა რაოდენობის აღნიშვნით. მივიღებთ:



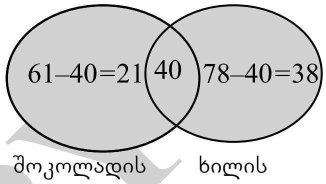
ა) 50–(7+1+12+5+3+2+14)=50–44=6.

ბ) 1; გ) 7; დ) 14; ე) 37.

(12) ვენის დიაგრამის მიხედვით, დავასკვნით, რომ მხოლოდ შოკოლადის ნაყინი 21 გამოკითხულს უყვარს, მხოლოდ ხილის ნაყინი — 38-ს. ნაყინის მოყვარულთა საერთო რაოდენობა არის:

$21+40+38=99\neq100$.

მაშასადამე, გამოკითხვის შედეგები არასწორადაა აღრიცხული.



(13) ა) $1{,}02<1{,}0234107...<1{,}03$, ჭეშმარიტი უტოლობა გვაქვს;

ბ) $1{,}0234107...<1{,}03$, ჭეშმარიტი უტოლობაა;

გ) $1{,}0234107...>1{,}0234107$, ინფორმაცია არ არის საკმარისი;

დ) $1{,}0234107...<1{,}0235106...$, ჭეშმარიტი უტოლობაა;

ე) $1{,}0234107...+1{,}0235106...\leq 2{,}046922<2{,}048$, ჭეშმარიტი უტოლობაა;

ვ) $1{,}0234107...+1{,}0235106...>2{,}0469>2{,}046$.

მაშასადამე, $x+y<2{,}046$ მცდარი უტოლობაა.

(14) ა) $a+b$ შეიძლება იყოს რაციონალური რიცხვი; მაგალითად, $(3-\sqrt{5})+(\sqrt{5})=3\in\boldsymbol{Q}$.

ბ) ab შეიძლება იყოს რაციონალური რიცხვი; მაგალითად, $(-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}=-3\in\boldsymbol{Q}$.

გ) $\sqrt{a+b}$ შეიძლება იყოს რაციონალური; მაგალითად, $\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})}=\sqrt{4}=2$.

დ) $\frac{a}{\sqrt{b}}$ შეიძლება იყოს რაციონალური რიცხვი; მაგალითად, $a\sqrt[4]{2}$, $b=\sqrt{2}$. მაშინ $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}=1\in\boldsymbol{Q}$.

(15) ამ ამოცანის გამოყენებით, მოსწავლეები გაიაზრებენ მკვიდრ წარმოდგენებს რიცხვებისა და მათი წარმოდგენების შესახებ — რიცხვის ჩაწერა შეიძლება სხვადასხვა, თუმცა ეკვივალენტური ფორმებით; ყოველი რაციონალური რიცხვი შეიძლება ჩავწეროთ $\frac{m}{n}$ წილადის სახით ($m\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{N}$); მაგალითად, $-\frac{3}{5}=\frac{(-3)}{5}$; $-1{,}7=\frac{-17}{10}$–; $0{,}(1)=\frac{1}{9}$. $\sqrt{n}$ ($n\in\boldsymbol{N}$) ირაციონალური რიცხვია იმ შემთხვევაში, როცა n არ არის რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატი, $\sqrt{3}$ და $\sqrt{5}$ ირაციონალური რიცხვებია, $\sqrt{9}=3$ რაციონალური რიცხვია, $3=\frac{3}{1}$.

(18) პირობით, $(1+\sqrt{3})^2+a(1+\sqrt{3})+b=0$, საიდანაც $b=-4-a-\sqrt{3}(a+2)$. b რაციონალურია, თუ $a=-2$.

საშინაო დავალების ამოცანების ნაწილი კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია და იმ ხერხების გამოყენებით იხსნება, რომლებიც კლასში გამოიყენეს მოსწავლეებმა. მაგალითად, სიმრავლეებზე მოქმედებების თვისებების დამტკიცებისას (ამოცანა △2), ვიყენებთ ორი სიმრავლის ტოლობის დამტკიცების მეთოდს: თუ $A\subset B$ და $B\subset A$, მაშინ $A=B$. ანუ $A=B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა, ყოველი $x\in A$-სთვის, მიიღება: $x\in B$ და,პირიქით, ყოველი $x\in B$-სთვის, მიიღება: $x\in A$. △1 და △3 ამოცანების ამოხსნაც არ უნდა გაუჭირდეთ მოსწავლეებს. მაგალითად, სიმრავლეები △1 ამოცანაში ასე ჩაიწერება: $A=\{1;\ 3;\ 5;\ 15\}$, $B=\{2;\ 3;\ 5;\ 7\}$, $C=\{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$. ამ წარმოდგენის გამოყენებით ადვილად ვპოულობთ პასუხებს △1 ამოცანაში დასმულ კითხვებზე.

△3 ამ ამოცანაში ცარიელი სიმრავლეა, მაგალითად, $\frac{1}{x}=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე, $x^2+9=0$ განტოლების მთელ ამონახსნათა სიმრავლე.

4 ამოცანაში ერთი და იმავე სიმრავლის უხუცეს წევრზეა საუბარი; ეს სიმრავლე მათემატიკოსებისა და მოჭადრაკეების სიმრავლის თანაკვეთაა.

5 ამოცანა **1** ამოცანის ანალოგიურია და, სიმრავლეების წარმოდგენით ელემენტების მითითების გზით, ადვილად იხსნება.

6 $f(x)\cdot g(x)=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე შეიცავს $f(x)=0$ და $g(x)=0$ განტოლებათა ყველა ამონახსნს — აღნიშნული სიმრავლე არის A და B სიმრავლეების გაერთიანება.

$(f(x))^2+(g(x))^2=0$ ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x)=0$ და $g(x)=0$. მაშასადამე, $(f(x))^2+(g(x))^2=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე არის A და B სიმრავლეთა თანაკვეთა.

7 და **8** ამოცანების ანალოგიური ამოცანები კლასში ამოიხსნა.

9 ანალოგიური ამოცანა, ვენის დიაგრამის გამოყენებით, კლასში ამოიხსნა.

10 მოსწავლემ უნდა შეძლოს 1-დან 100-მდე 7-ის ჯერადების A სიმრავლისა და 9-ის ჯერადების B სიმრავლის ელემენტების რაოდენობის გამოთვლა: $n(A)=\left[\frac{100}{7}\right]=14$; $n(B)=\left[\frac{100}{9}\right]=11$.

ბ) ამოცანაში, ცხადია, მოითხოვება $n(\overline{A\cup B})$ რაოდენობის დადგენა. რადგან $n(A\cup B)=14+11-1=24$, ამიტომ $n(\overline{A\cup B})=100-24=76$.

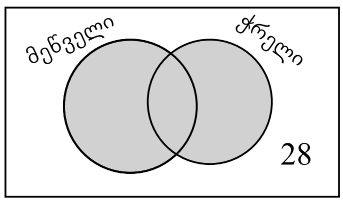
ამასთანავე, ცხადია, რომ ა) კითხვის პასუხი არის $100-1=99$ (ორივეზე იყოფა მხოლოდ რიცხვი 63).

11 ამ ამოცანის ანალოგიური კლასში ამოვხსენით.

12 აქ ვიყენებთ ფორმულას:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B),$$
$$26=15+21-n(A\cap B)$$
$$n(A\cap B)=10.$$

13 $n(A)=15$, $n(B)=17$.

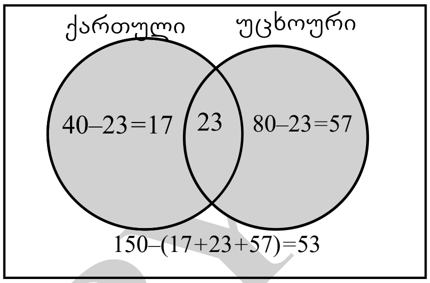


პირობაში არ არის მითითებული, რომ 28 ძროხას შორის ყოველი მეწველია, ან ჭრელია. ამიტომ, მეწველი ან ჭრელი ძროხების რაოდენობა ≤ 28.

$15+17-x\leq 28$

$x\geq 4$.

14 ანალოგიური ამოცანა კლასში ამოვხსენით. მოსწავლემ უნდა გაითვალისწინოს, რომ ვენის დიაგრამის შევსებას „საერთო ნაწილში“ რიცხვის ჩასმით ვიწყებთ.



ა) 57; ბ) 17; გ) 53.

15 $\sqrt{48}-\sqrt{300}=4\sqrt{3}-10\sqrt{3}=-6\sqrt{3}$;

$-6\sqrt{3}=-\sqrt{108}$;

$10<\sqrt{108}<11$;

$-11<-\sqrt{108}<-10$.

პასუხი: -11.

16 შეიძლება ამ რიცხვების კვადრატები შევადაროთ (რადგან ორივე დადებითია):

$(\sqrt{6}+\sqrt{10})^2=16+2\sqrt{60}=16+4\sqrt{15}$

$(3+\sqrt{7})^2=16+6\sqrt{7}$

შევადაროთ $4\sqrt{15}$ და $6\sqrt{7}$; ანუ, შევადაროთ $\sqrt{240}$ და $\sqrt{252}$.

ცხადია $\sqrt{252}>\sqrt{240}$. ამრიგად, $6\sqrt{7}>4\sqrt{15}$ და $3+\sqrt{7}>\sqrt{6}+\sqrt{10}$.

17 ვთქვათ, $x=5n-2$ ($n\in\boldsymbol{N}$).

შეიძლება განვიხილოთ n-ის ყველა შემთხვევა: $n=3k-2$, $n=3k-1$, $n=3k$ ($k\in\boldsymbol{N}$). მაშინ $x=15k-12$, $x=15k-7$ ან $x=15k-2$. მათგან 3-ის ჯერადებია $x=15k-12$ სახის რიცხვები.

18 ამოცანა უკავშირდება სამიზნე ცნებებზე მკვიდრი წარმოდგენების გააზრებას: ყოველი რაციონალური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს $\frac{m}{n}$ სახით, სადაც $m\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{N}$; თუ n არ არის რაციონალური რიცხვის კვადრატი, მაშინ $\sqrt{n}$ არის ირაციონალური რიცხვი. $-\frac{4}{5}=\frac{(-4)}{5}$; $-\frac{8}{15}=\frac{(-8)}{15}$; $-8=\frac{(-8)}{1}$; $0,(2)=\frac{2}{9}$; $\sqrt{\frac{-16}{-25}}=\frac{4}{5}$ რაციონალური რიცხვებია, ხოლო $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ და $\sqrt{\frac{4}{27}}$ ირაციონალური რიცხვებია.

19 კლასში ამოხსნილი 18-ის ანალოგიურია. $(2-\sqrt{3})$-ის განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ: $b=-7-2a+\sqrt{3}(a+4)$. b რაციონალური იქნება, თუ $a=-4$.

21 დავამტკიცოთ რომ ირაციონალურია $\sqrt[3]{7}$ დავუშვათ საწინააღმდეგო — $\sqrt[3]{7}$ რაციონალური რიცხვია, მაშინ ის შეიძლება წარმოვადგინოთ უკვეცი წილადის სახით, $\sqrt[3]{7}=\frac{m}{n}$, საიდანაც $m^3=7n^3$. m^3 იყოფა 7-ზე, ე. ი. m-იც იყოფა 7-ზე, $m=7k$, მაშინ $(7k)^3=7n^3$, $n^3=49k^3$, n^3 იყოფა 7-ზე, n-იც იყოფა 7-ზე. მივიღეთ წინააღმდეგობა — $\frac{m}{n}$ იკვეცება 7-ზე, ის არ არის უკვეცი.

დავამტკიცოთ რომ ირაციონალურია $log_2 3$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო — $log_2 3=\frac{m}{n}$, სადაც $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადია, მაშინ

$2^{\frac{m}{n}}=3$, $2^m=3^n$. მარცხენა მხარე იყოფა 2-ზე, მარჯვენა კი არ იყოფა. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

დავამტკიცოთ რომ ირაციონალურია $\sqrt{4-\sqrt{5}}$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო — $\sqrt{4-\sqrt{5}}=\frac{m}{n}$, სადაც $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადია, მაშინ $\sqrt{5}=\frac{4n^2-m^2}{n^2}$, ე. ი. $\sqrt{5}$ რაციონალური რიცხვია, ის ჩაიწერება უკვეცი წილადის სახით: $\sqrt{5}=\frac{m_1}{n_1}$ აქედან $m_1^2=5n_1^2$. მივიღეთ, რომ m_1 არის 5-ის ჯერადი $m_1=5k$, ე. ი. $n_1^2=5\ k^2$, n_1^2 არის 5-ის ჯერადი, მაშასადამე 5-ის ჯერადია n_1 და $\frac{m}{n}$ წილადი უკვეცი არ არის, იკვეცება 5-ზე. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

6.2. დებულებათა დასაბუთების ხერხები. აუცილებელი და საკმარისი პირობები

ახალ საკითხებზე გადასვლამდე ვამოწმებთ საშინაო დავალებას; ამ პროცესს განმავითარებელი შეფასებისთვისაც ვიყენებთ — ვაზუსტებთ და კორექტივები შეგვაქვს მოსწავლეთა ამოხსნებში, რომლებიც სიმრავლეებსა და სიმრავლეებზე მოქმედებებს უკავშირდება; ვამოწმებთ, შეუძლია თუ არა მოსწავლეს განასხვავოს რიცხვითი სიმრავლეების ელემენტები რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების ჩაწერის წესების მიხედვით. შეუძლია თუ არა მოსწავლეს, დაასაბუთოს სიმრავლეებზე მოქმედებები სიმრავლეების ტოლობის ცნების გამოყენებით.

ამ პარაგრაფში წარმოდგენილი მასალით ვაგრძელებთ გამეორების პროცესს; მიმდინარეობს ცოდნის გამეორება და გაღრმავება დებულებების დასაბუთების ხერხების შესახებ; აქ ვითვალისწინებთ საშუალო საფეხურის სტანდარტის შეფასების ინდიკატორს — მათ. საშ. 9. მოსწავლემ უნდა შეძლოს „... დებულების დასაბუთების პირდაპირი და არაპირდაპირი მეთოდების ფლობით ლოგიკური დასკვნების გამოტანა“. საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის გამოყენება, აუცილებელი და საკმარისი პირობების გამოყოფა, წინადადებების ჩამოყალიბება ამ ტერმინების გამოყენებით — მნიშვნელოვანი საკითხებია საშუალო საფეხურზე სწავლების მიზნების განხორციელებისას, მზადებაცაა უმაღლეს სკოლაში სწავლის გასაგრძელებლად ან შრომითი საქმიანობის წარმატებით განსახორციელებლად. მნიშვნელოვანია საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის გამოყენების მაგალითების აღწერა ფიზიკიდან და ყოველდღიური ცხოვრებიდან. ახალი მაგალითების განხილვა მოსწავლეთა აქტიური ჩართულობით უნდა მიმდინარეობდეს; გამორჩეული აქცენტი უნდა კეთდებოდეს იმ დასკვნებზე, რომლებიც პრაქტიკულ გამოყენებას ახლავს. ზოგჯერ მოსწავლეები იმეორებენ ამ დასკვნებს, ზოგჯერ — თავად აკეთებენ დასკვნებს.

მნიშვნელოვანია აუცილებელი და საკმარისი პირობების გამოყოფა და ამ ტერმინებით ერთი თეორემის სახით ორი დებულების ჩამოყალიბება. ეს საკითხები XX საუკუნეში მათემატიკის სწავლების რეფორმების მიმდინარეობისას VII-VIII კლასებშიც კი განიხილებოდა; თუმცა, ხშირად, I კურსელებსაც კი უჭირთ აღნიშნული პირობების გამოყოფა და დამტკიცების პროცესის ჩატარება. შემოთავაზებული თეორიული და პრაქტიკული ამოცანები დაეხმარება მოსწავლეებს ამ ტერმინებში თეორემების ჩამოყალიბების უნარჩვევების გამომუშავებაში.

ამოცანების ამოხსნა აღნიშნული საკითხების შესახებ ცოდნის განმტკიცების კარგი საშუალებაა.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

1 პირობითი წინადადების სახით თეორემა ასე ჩამოყალიბდება:

„თუ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, მაშინ მისი დიაგონალები იკვეთება და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა“.

2 აქ გვაქვს გამომდინარეობა: $p \to q$ — „თუ x რიცხვი ნულის ტოლია, მაშინ xy ნამრავლი ნულის ტოლია“.

ბ) p არის საკმარისი პირობა q-სთვის, q არის აუცილებელი პირობა p-სთვის. „xy ნამრავლი ნულის ტოლი რომ იყოს, საკმარისია x იყოს ნულის ტოლი“.

3 აქ გვაქვს გამომდინარეობა: $p \to q$ („თუ n ნატურალური რიცხვი იყოფა 9-ზე, მაშინ n-ის ათობით ჩანაწერში ციფრების ჯამი იყოფა 3-ზე). შებრუნებული დებულება — $q \to p$ არ არის ჭეშმარიტი: „თუ ნატურალური რიცხვის ათობით ჩანაწერში ციფრების ჯამი იყოფა 3-ზე, მაშინ ეს ნატურალური რიცხვი იყოფა 9-ზე“. კონტრმაგალითი: 15; 1+5=6 იყოფა 3-ზე, მაგრამ 15 არ იყოფა 9-ზე.

4 აქ მოსწავლემ პითაგორას თეორემა კი არა, არამედ გამოიყენა მისი შებრუნებული თეორემა: „თუ სამკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძეების კვადრატების ჯამის ტოლია, მაშინ სამკუთხედი მართკუთხაა“.

5 ერთი თეორემის სახით აღნიშნული ორი თეორემა ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: წერტილი, რომელიც კუთხეს ეკუთვნის, ტოლი მანძილებით რომ იყოს დაშორებული კუთხის გვერდებიდან, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ეს წერტილი კუთხის ბისექტრისაზე მდებარეობდეს.

6 შებრუნებული თეორემა: თუ პარალელოგრამის დიაგონალები ტოლია, მაშინ ეს პარალელოგრამი მართკუთხედია.

პარალელოგრამი მართკუთხედია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დიაგონალები ტოლია.

7 ა) იმისათვის, რომ ორი ნამდვილი რიცხვის ჯამი რაციონალური იყოს, საკმარისია (მაგრამ არ არის აუცილებელი), რომ ორივე რიცხვი იყოს რაციონალური.

ბ) იმისათვის, რომ მოიგოთ ლატარიაში, აუცილებელია (მაგრამ არ არის საკმარისი), გქონდეთ ერთი მაინც ლატარიის ბილეთი.

8 გ) 1) ორი ნატურალური რიცხვიდან თითოეული იყოფა მეორეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს რიცხვები ტოლია.

2) იმისათვის, რომ ორი ნატურალური რიცხვიდან თითოეული იყოფოდეს მეორეზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ეს რიცხვები ტოლი იყოს.

დებულებებში „მაშინ და მხოლოდ მაშინ“ ყოველთვის შეიძლება შეიცვალოს „აუცილებელი და საკმარისიათი“. ამის გათვალისწინებით, წინადადებები სხვადასხვა ფორმითაა ჩამოყალიბებული სახელმძღვანელოს პასუხებში.

9 შებრუნებული თეორემა: თუ კვადრატულ სამწევრს აქვს ორი ნამდვილი ფესვი, მაშინ მისი დისკრიმინანტი დადებითია. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო — დისკრიმინანტი უარყოფითია, ან ნულია. პირველ შემთხვევაში განტოლებას ფესვები არა აქვს, მეორე შემთხვევაში ერთი ფესვი აქვს. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

10 ეს ამოცანა დირიხლეს პრინციპის ერთ-ერთ საილუსტრაციო მაგალითს წარმოადგენს. დავუშვათ საწინააღმდეგო — თუ არცერთ გალიაში 2 კურდღელზე მეტი არ აღმოჩნდა, მაშინ კურდღლების რაოდენობა არ შეიძლება აღემატებოდეს $12\cdot2=24$-ს, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით იხსნება 11 ამოცანაც.

12-13 ამოცანების ანალოგიური ამოცანები წინა პარაგრაფშიც ამოვხსენით.

14 ამოცანის 1**)** დავალების მიხედვით, მოსწავლეები მსჯელობენ და ასკვნიან, რომ ზოგჯერ დასაბუთების პირდაპირი ხერხის გამოყენება უფრო მიზანშეწონილია, რადგან არაპირდაპირი ხერხის გამოყენებისას მეტი სირთულეების გადალახვა გვიხდება.

ჯგუფების წარმომადგენლებმა უნდა წარმოადგინონ დამტკიცების ორივე ხერხი (სასურველია, თითოეული ჯგუფის პრეზენტაციები სხვადასხვა მოსწავლეს ევალებოდეს). იმსჯელონ ორივე ხერხის გამოყენებაზე, რა სირთულეები ახლავს არაპირდაპირი ხერხის გამოყენებას?

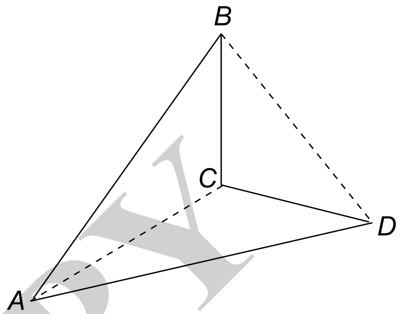
პირდაპირი დამტკიცება: ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ მოცემულ შუალედში ზრდადი ფუნქციებია — ამ შუალედის ნებისმიერი ორი x_1 და x_2 რიცხვისთვის, თუ $x_2>x_1$, მაშინ $f(x_2)>f(x_1)$ და $g(x_2)>g(x_1)$. მაშასადამე, თუ $x_2>x_1$, მაშინ $f(x_2)+g(x_2)>f(x_1)+g(x_1)$, რაც, განსაზღვრების თანახმად, ნიშნავს $f(x)+g(x)$ ფუნქციის ზრდადობას ამავე შუალედში.

საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის გამოყენება: ვთქვათ, f და g ზრდადი ფუნქციებია მოცემულ შუალედში, მაგრამ $f+g$ არ არის ზრდადი ფუნქცია ამ შუალედში. მაშინ უნდა არსებობდეს რიცხვები x_1 და x_2, ისეთი, რომ $x_2>x_1$, მაგრამ $f(x_2)+g(x_2) \le f(x_1)+g(x_1)$.

ეს უტოლობა მხოლოდ მაშინ შეიძლება შესრულდეს, როცა მცდარია ერთ-ერთი პირობა მაინც: $f(x_2)>f(x_1)$ ან $g(x_2)>g(x_1)$, ანუ არ არის ზრდადი ერთ-ერთი ფუნქცია f და g ფუნქციებს შორის. მივიღეთ წინააღმდეგობა. აქ რამდენიმე მომენტია, რომლის გათვალისწინება არ არის ადვილი (მაგალითად, ზოგადობის კვანტორის საწინააღმდეგო — არსებობის კვანტორის გამოყენება). დამტკიცების ბოლო წინადადებებიც კარგად უნდა ახსნას მოსწავლემ.

საშინაო დავალების ამოცანების უმეტესობა კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია, მაგრამ ეხება სხვა გეომეტრიულ დებულებებს. ამიტომ მოსწავლეებისგან მოითხოვს სამიზნე ცნებების (დასაბუთების პირდაპირი და არაპირდაპირი ხერხები, აუცილებელი და საკმარისი პირობა) კარგად გააზრებას.

2) დავალების განხილვისას, სხვადასხვა კერძო შემთხვევის ან დამტკიცების მეთოდის სინჯვის შემდეგ მოსწავლეები, მოსალოდნელია, მიაკვლევენ დასმული ამოცანის პასუხს. მაგალითად, ასეთი $ABCD$ ოთხკუთხედის (არაამოზნექილი ოთხკუთხედის) დიაგონალები ტოლია, ოთხკუთხედი კი არ არის მართკუთხედი.



1 თუ x რიცხვი დადებითია, მაშინ x რიცხვის კვადრატი ნულის ტოლი არ არის — $q \to p$.

იმისათვის, რომ x რიცხვი იყოს დადებითი, აუცილებელია, რომ x რიცხვის კვადრატი არ იყოს ნულის ტოლი.

იმისათვის, რომ x რიცხვის კვადრატი ნულის ტოლი არ იყოს, საკმარისია x რიცხვი იყოს დადებითი.

2 ბ) თუ ოთხკუთხედი მართკუთხედია, მაშინ მისი დიაგონალები ტოლია.

3 ჭეშმარიტია $q \to p$ თეორემა: თუ n ნატურალური რიცხვის ათობითი ჩანაწერის ბოლო ციფრი არის 5, მაშინ n ნატურალური რიცხვი იყოფა 5-ზე.

4 ნინიკოს მსჯელობა არ არის სწორი; დასკვნა უნდა გაკეთდეს თეორემიდან: „თუ პარალელოგრამის დიაგონალები ტოლია, მაშინ პარალელოგრამი მართკუთხედია" და არა თეორემიდან: „თუ პარალელოგრამი მართკუთხედია, მაშინ დიაგონალები ტოლია".

5 მონაკვეთის შუამართობის თვისება: სიბრტყის წერტილი ეკუთვნის ამ სიბრტყეზე მდებარე მონაკვეთის შუამართობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს წერტილი ტოლი მანძილებით არის დაშორებული მონაკვეთის ბოლოებიდან.

6 სამკუთხედი მართკუთხაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ერთი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია.

7 ა) იმისათვის, რომ მოცემულ სამ a, b და c რიცხვს შორის ორი რიცხვი მაინც ტოლი იყოს, საკმარისია, მაგრამ არ არის აუცილებელი, რომ შესრულდეს ტოლობა:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0.$$

9 ანალოგიური ამოცანა კლასში იყო დამტკიცებული. ეს ამოცანები ეყრდნობა შემდეგ პრინციპს: **თუ გვაქვს რამდენიმე ჭეშმარიტი პირდაპირი თეორემა, რომლებიც ამოწურავს ყველა შემთხვევას, მაშინ ყველა შებრუნებული თეორემა ჭეშმარიტია.**

აქ გვაქვს სამი პირდაპირი თეორემა:

თუ $D>0$, კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ფესვი,

თუ $D=0$, აქვს ერთი ფესვი,

თუ $D<0$, არა აქვს ფესვი.

ყველა შემთხვევა ამოიწურა, ჭეშმარიტია სამივე შებრუნებული თეორემა. მოსწავლეებთან ერთად შევაჯამოთ ამ საკითხის განხილვა და, კვლავ, საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით, დავამტკიცოთ სამივე შებრუნებული თეორემა.

10 დირიხლის პრინციპის გამოყენება კლასშიც განვიხილეთ. ეს პრინციპი საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხის გამოყენებას ეყრდნობა. თითოეულ კარავში რომ არაუმეტეს 1 ტურისტი აღმოჩნდეს, მაშინ 6 კარავში არაუმეტეს 6 ტურისტი იქნება, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ანალოგიურია **13** ამოცანა. თვეების რიცხვი 12-ია. თუ არ მოიძებნა 4 მოსწავლე, რომლებიც ერთსა და იმავე თვეშია დაბადებული, მაშინ თითოეულ თვეში დაბადებულთა რიცხვი არ აღემატება 3-ს, 12 თვეში დაბადებულთა რიცხვი — 36-ს. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

14 პირდაპირი და არაპირდაპირი ხერხების შედარება კლასში განვიხილეთ. ეს ამოცანა ანალოგიურად იხსნება.

პირდაპირი ხერხი: თუ $n=2k_1$, $m=2k_2$ ($n\in\boldsymbol{N}$, $m\in\boldsymbol{N}$, $k_1\in\boldsymbol{N}$, $k_2\in\boldsymbol{N}$), მაშინ
$n+m=2k_1+2k_2=2(k_1+k_2)$ — ლუწია.

არაპირდაპირი ხერხი. დავუშვათ n ლუწია, m ლუწია და ($m+n$) კენტია, მაშინ n ან m აუცილებლად კენტია, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

შებრუნებული დებულება: თუ ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი ლუწია, მაშინ ეს ნატურალური რიცხვები ლუწი რიცხვებია. ეს დებულება არ არის ჭეშმარიტი — ორივე შესაკრები შეიძლება კენტი იყოს.

6.3 თეორემები და აქსიომები. თეორემათა დამტკიცების ხერხები

წინარე ცოდნის გააქტიურება მოსწავლეთათვის ნაცნობი გეომეტრიული ფიგურების დასახელებითა და თვისებების აღწერით იწყება. მოსალოდნელია, რომ ასეთ ფიგურებად მოსწავლეები წერტილს, წრფესა და სიბრტყეს დაასახელებენ. შეიძლება ამ ფიგურების შესახებ ჩვენი წარმოდგენების აღწერაზეც გადავიდეთ — მაგალითად, წერტილის განხილვის დროს ზომებს უგულებელვყოფთ; წერტილის გამოსახულების ზომების უგულებელყოფას მივყავართ გეომეტრიული წერტილის წარმოდგენასთან, ამ გეომეტრიული ფიგურის ნაწილებად წარმოდგენა შეუძლებელია. როცა ფიზიკაში ვსაუბრობთ მატერიალური წერტილის შესახებ და დიდ საგნებსაც კი (რაიმე პროცესის განხილვის დროს) წერტილად მივიჩნევთ — ამ დროს მხედველობაში არ ვიღებთ ამ ობიექტის ზომებს. ამ შემთხვევაში, როგორც წესი, ამ „წერტილის“ მოძრაობის ტრაექტორია გვაინტერესებს და ეს ტრაექტორიაც აბსტრაქციის შედეგია, როცა არ უგულებელვყოფთ მხოლოდ სიგრძეს. აქ შეიძლება გამოვიყენოთ სახელმძღვანელოში აღწერილი წარმოდგენები და პრაქტიკული ასპექტები, რომლებიც ამ ცნებებისა და მათი თვისებების შესახებ არის წარმოდგენილი. ზოგიერთი მეცნიერი აქსიომებს, რომლებიც ძირითად გეომეტრიულ ფიგურებს აღწერს, ამ გეომეტრიული ფიგურების „ირიბ“ განსაზღვრებებად მოიხსენიებს.

გეომეტრიული სასკოლო კურსის აქსიომური მეთოდით გადმოცემა, როცა ჩამოთვლილია ძირითადი გეომეტრიული ცნებები (განსაზღვრებების გარეშე შემოღებული), ჩამოყალიბებულია აქსიომები და მათზე დაყრდნობით მტკიცდება თეორემები, დამახა-

სიათებელი იყო ადრინდელი სახელმძღვანელოებისთვის და მოსწავლეების მიერ ძნელად აითვისებოდა. ამ სახელმძღვანელოებში ევკლიდური გეომეტრიის აგების სხვადასხვა ინტერპრეტაცია განიხილებოდა. თუმცა, აქსიომური მეთოდის მკაცრი დაცვა სასკოლო კურსში შეუძლებელია (იხ., მაგ., [41], [25]).

მასწავლებლებს კიდევ ერთხელ შევახსენებთ, რომ აქსიომა არის დებულება, რომელიც დაუმტკიცებლად მიიღება და აქ მიუღებელია, რომ დავამატოთ სიტყვები — „თვალსაჩინოების გამო“ (თუ პლანიმეტრიის აქსიომათა სისტემიდან ბოლო აქსიომას, პარალელურობის აქსიომას, შევცვლით მისი საწინააღმდეგოთი, ახალ სისტემაზე აიგება გეომეტრია, რომელიც ისევე არაწინააღმდეგობრივია, როგორც ევკლიდური).

ჩვენ ვკმაყოფილდებით ძირითადი გეომეტრიული ობიექტების შესახებ წარმოდგენისა და წარმოშობის აღწერითა და რამდენიმე აქსიომის წარმოდგენით. მათზე დაყრდნობით, შეიძლება წარმოვადგინოთ საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით თეორემათა დამტკიცების მაგალითები.

ტექსტში წარმოდგენილია სამი აქსიომა, რომლებითაც აღიწერება ძირითადი გეომეტრიული ცნებები, წერტილი და წრფე სიბრტყეზე.

ჩამოყალიბებულია ცნობილი აქსიომა, რომელიც გერმანელი მათემატიკოსის ჰილბერტის კლასიფიკაციაში მე-5 ჯგუფის ერთადერთი აქსიომაა — პარალელურობის აქსიომა.

ვიხსენებთ წარმოდგენებს თეორემისა და თეორემის შემადგენელი ნაწილების შესახებ. წარმოდგენილია საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით ერთ-ერთი თეორემის დამტკიცება, რომელიც ისევე „თვალსაჩინოა“, როგორც ზოგიერთი აქსიომა, მაგრამ თეორემაა — მტკიცდება ერთ-ერთი აქსიომის გამოყენებით.

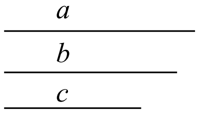
წარმოდგენილია გეომეტრიის აგების ერთ-ერთი ფრაგმენტი — რამდენიმე აქსიომა და, მათზე დაყრდნობით, ვამტკიცებთ თეორემებს.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

2 თუ კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ფესვი, მაშინ მისი დისკრიმინანტი დადებითია.

დავუშვათ, D არ არის დადებითი — 0-ის ტოლია, ან უარყოფითი. მაშინ, ამ კვადრატულ განტოლებას ექნება, შესაბამისად, ერთი ფესვი, ან არ ექნება ფესი.

4



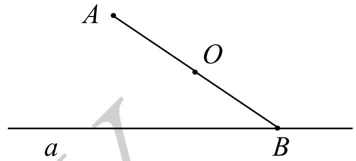
მოცემულია: $a||c$; $b||c$.

უ. დ. $a||b$

ცხადია, a, b და c წრფეები ერთ სიბრტყეზეა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, a და b წრფეები არ არის პარალელური — a და b წრფეები იკვეთება. მაშინ მივიღებთ, რომ მათი გადაკვეთის წერტილზე c წრფის პარალელური ორი წრფე გადის; ეს ეწინააღმდეგება პარალელურობის აქსიომას; რადგან a და b წრფეთა საერთო წერტილი არ შეიძლება ეკუთვნოდეს c წრფეს და მასზე c წრფის პარალელური არაუმეტეს ერთი წრფის გავლება შეიძლება.

5 დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, a და b წრფეები იკვეთება C წერტილზე და C_1 მისი სიმეტრიული წერტილია O ცენტრის მიმართ. ამრიგად, ჩვენს დაშვებას მივყავართ დასკვნამდე — a და b-ს ორი საერთო წერტილი აქვს, C და C_1. მართლაც, a წრფეზე მდებარე C წერტილის სიმეტრიული ეკუთვნის b-ს (C_1 ეკუთვნის b-ს). b წრფეზე მდებარე C წერტილის სიმეტრიული წერტილი ეკუთვნის a-ს (C_1 ეკუთვნის a-ს).

6 ვთქვათ, A წერტილი არ ეკუთვნის a წრფეს. შევარჩიოთ რაიმე B წერტილი a წრფეზე. ვთქვათ, O არის AB მონაკვეთის შუა წერტილი. განვიხილოთ ცენტრული სიმეტრია O ცენტრის მიმართ. ვთქვათ, b არის a წრფის სიმეტრიული O ცენტრის მიმართ. ეს წრფე გადის A წერტილზე და პარალელურია a წრფის (წინა ამოცანის თანახმად).



ამ კონსტრუქციის მოფიქრება მოსწავლეებს შეიძლება გაუჭირდეთ; შეიძლება დავეხმაროთ და შევახსენოთ წინა ამოცანაში დასაბუთებული დებულება.

7 უკვე დამტკიცებულია (იხილეთ 6 ამოცანის ამოხსნა), რომ, თუ A წერტილი არ ეკუთვნის a წრფეს (მოკლედ ამას ასე ჩავწერთ: $A \notin a$), მაშინ არსებობს b წრფე, რომელიც გადის A-ზე და a წრფის პარალელურია. პარალელურობის აქსიომის თანახმად, A წერტილზე a წრფის პარალელური ერთზე მეტი წრფის გავლება შეუძლებელია, მაშასადამე, თუ A წერტილი არ ეკუთვნის a წრფეს, მაშინ არსებობს ერთადერთი წრფე, რომელიც A წერტილზე გადის და a წრფის პარალელურია.

8 თუ (a_n) გეომეტრიული პროგრესიაა, მაშინ $a_{n+2}=a_n \cdot q^2$ (1 მნიშვნელია). ამრიგად, $a_n \cdot a_{n+2}$ ნამრავლი არ შეიძლება იყოს უარყოფითი.

9 ა) დავუშვათ საწინააღმდეგო: m არ იყოფა 3-ზე, მაშინ m-ის 3-ზე გაყოფისას ნაშთი შეიძლება იყოს 1 ან 2; $m=3k+1$ ან $m=3k+2$, $(k=0, 1, 2, ...)$. მაგრამ $(3k+1)^2$ და $(3k+2)^2$ რიცხვებიდან არც ერთი არ იყოფა 3-ზე.

ბ) დავუშვათ საწინააღმდეგო, $m=3k$, $(k \in \boldsymbol{N})$. მაშინ $m^2=9k^2$ და $9k^2-1$ არ იყოფა 3-ზე, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

10 და 11 ამოცანების ანალოგიური ამოცანები ადრეც იყო განხილული. ეს ამოცანები მოსწავლეებს შეიძლება დამოუკიდებელ სამუშაოდ მივცეთ. შეიძლება მოსწავლეებმა გაიხსენონ თეორემა: თუ პირდაპირი თეორემებით ყველა შემთხვევა ამოწურულია და ისინი ჭეშმარიტია, მაშინ ყველა შებრუნებულიც ჭეშმარიტია.

12 შეიძლება განვიხილოთ რომბი, რომლის დიაგონალებია 6 და 8 (გვერდი — 5); $S=\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8=24$. მოცემული ფორმულით მივიღებთ: $S=\sqrt{(10-5)^4}=5^2=25$.

(13) დავუშვათ საწინააღმდეგო, P წერტილი არ ეკუთვნის AD მონაკვეთის შუამართობს. მაშინ $PA \neq PD$. მაგრამ APD სამკუთხედი ტოლფერდაა (რადგან $\angle A=\angle D$). მივიღეთ წინააღმდეგობა.

მოსწავლემ უნდა ახსნას, რომ გამოყენებულია მონაკვეთის შუამართობის თვისება — მონაკვეთის შუამართობი არის იმ წერტილთა სიმრავლე (ყველა იმ წერტილის გეომეტრიული ადგილი), რომლებიც ტოლი მანძილებითაა დაშორებული მონაკვეთის ბოლოებიდან.

საშინაო დავალების ამოცანების ნაწილი ან ძველის გამეორებაა, ან კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია (მაგალითად, 8 და 9).

2 შებრუნებული თეორემა: თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი მართკუთხედია.

ამ თეორემის მცდარობას მოსწავლეები კონტრმაგალითის მოყვანით დაასაბუთებენ.

3 დამტკიცება ჩავატაროთ საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით; ვთქვათ, სიბრტყეზე ორ წრფეს აქვე ორი ან მეტი საერთო წერტილი, მაშინ მივიღებთ წინააღმდეგობას I_2 აქსიომასთან, რომლის თანახმადაც, ყოველ ორ წერტილზე მხოლოდ ერთი წრფე გადის.

4 I_3 აქსიომის თანახმად, არსებობს სამი წერტილი, რომლებიც ერთ წრფეს არ ეკუთვნის. განვიხილოთ ნებისმიერი წრფე. ამ აქსიომის თანახმად, შეუძლებელია, რომ ეს სამივე წერტილი ამ წრფეს ეკუთვნოდეს — ერთი წერტილი მაინც არ ეკუთვნის განხილულ წრფეს.

5 ა) დავუშვათ საწინააღმდეგო — c წრფე ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთს, ვთქვათ, a-ს, არ კვეთს, ხოლო მეორეს, ვთქვათ, b-ს კვეთს რაიმე M წერტილზე. მაშინ მივიღებთ, რომ M წერტილზე გადის a-ს პარალელური ორი წრფე — b და c. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ბ) დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, რომელიმე სამი წერტილი, მაგალითად, A, B და C, ერთ წრფეს ეკუთვნის. მაშინ ამ სამი წერტილიდან ერთ-ერთი წერტილი ორივე პარალელურ წრფეს ეკუთვნის, რაც შეუძლებელია. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

გ) თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს, მაშინ b და c განსხვავებულ წრფეებს ორი საერთო წერტილი აღმოაჩნდება. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

6 დავუშვათ საწინააღმდეგო — პარალელოგრამი რომბია. რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, რაც ამოცანის პირობას ეწინააღმდეგება. ე. ი. მოცემული პარალელოგრამი რომბი არ არის.

7 m^2 კენტია. დავუშვათ საწინააღმდეგო — m ლუწია, $m=2k$, მაშინ $m^2=4k^2$ ლუწია. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

8 ა) თუ რომელიმე სამკუთხედის კუთხეები არის 40^0, 60^0 და 70^0, მაშინ ჯამი იქნება 170^0. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ბ) აქ მიიღება წინააღმდეგობა სამკუთხედის უტოლობასთან: 9+11 მეტი არ არის 20-ზე — ასეთი სამკუთხედი არ არსებობს.

9 თუ დავუშვებთ, რომ C არის A-სა და B-ს შორის, მაშინ უნდა გვქონდეს $AC+CB=AB$; $9+CB=7$, რაც შეუძლებელია.

12 თუ $a=pm$, $b=pn$, $m\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$, მაშინ $pm=pn+c$, $c=p(m-n)$. ე. ი. c იყოფა p-ზე.

13 ა) თუ ორივე შესაკრები 28-ზე ნაკლებია, $x\leq27$, $y\leq27$, მაშინ $x+y\leq54$. ეს ეწინააღმდეგება პირობას: $x+y=55$.

ბ) თუ ათივე რიცხვი არ აღემატება 7-ს, მაშინ მათი ჯამი არ აღემატება 70-ს, რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

გ) თუ სამივე რიცხვი მეტია 5-ზე: $x>5$, $y>5$, $z>5$, მაშინ $xyz>125$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას ($xyz=124$).

გეომეტრიული დებულებების გარდა, წარმოდგენილია ალგებრული დებულებების დასაბუთების მაგალითებიც.

6.4 სიბრტყის ძირითადი თვისებები. სივრცეში წრფეებისა და სიბრტყეების ურთიერთგანლაგება

სტერეომეტრიის კურსის მკაცრი აქსიომური აგებისგანაც თავს ვიკავებთ. სასკოლო კურსში აქსიომების სისტემის სრული ჩამოთვლა და მათზე დაყრდნობით თვისებების დამტკიცება მიზანშეწონილად არ ითვლება და არც ახალი სტანდარტის მოთხოვნებს შეესაბამება — საკმარისია, რომ მოსწავლეებს შევუქმნათ მკაფიო წარმოდგენა გეომეტრიის აქსიომური აგების არსის შესახებ. ამის გათვალისწინებით სახელმძღვანელოში, შეიძლება ითქვას, აქსიომებზე საუბარი ფრაგმენტული და არასრულია, მისაწვდომობისა და სიმკაცრის შეხამება გარკვეულ კომპრომისს მოითხოვს — დასახელებულია რამდენიმე აქსიომა სივრცეში ფიგურათა ურთიერთგანლაგების შესახებ; მათ შორის — კუთვნილების აქსიომები და, ამ შემთხვევაშიც, კომპრომისული ვარიანტია წარმოდგენილი, რომელიც სამ წერტილზე სიბრტყის გავლების ორი აქსიომის გაერთიანებას ეხება. მასწავლებლებს იმასაც შევახსენებთ, რომ აქსიომური აგებისას, რომელიმე აქსიომა შეიძლება მისი ეკვივალენტური წინადადებით იყოს შეცვლილი (მაგალითად, განსხვავებული მიდგომები კოლმოგოროვისა და პოგორელოვის სახელმძღვანელოებში — ზოგიერთ მასწავლებელს ეს შეიძლება ახსოვდეს). მაგალითად, ჩვენ მიერ შემოთავაზებული აქსიომა „სამ წერტილზე სიბრტყის გავლების შესახებ“, ზოგიერთ წიგნში სხვა აქსიომით იყო შეცვლილი — „თუ ორ სხვადასხვა წრფეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ამ წრფეებზე შეიძლება სიბრტყის გავლება და, ამასთანავე, მხოლოდ ერთის“.

ტექსტში წარმოდგენილია სივრცეში წრფეებისა და სიბრტყეების ურთიერთგანლაგების შემთხვევები. ამ შემთხვევების კარგად გააზრებისა და შესაბამისი განსაზღვრებების ცოდნის გამოყენებით, ადვილად შევარჩევთ პასუხებს „ტესტებში“.

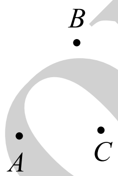
ამოცანების საშუალებით, სივრცულ ფიგურებსაც ვიხსენებთ და თეორიულ მასალას კვეთების აგების მეთოდიკის ახსნისთვის ვიყენებთ.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

(4) ამოცანის ამოხსნამდე, ვიმეორებთ მასალას მართკუთხა პარალელეპიპედის შესახებ — წახნაგები, ზედაპირი, ზედაპირის ფართობი, მოცულობა. ყველა წახნაგი მართკუთხედია, მოცულობა ასე გამოითვლება: $V=abc$, სადაც a, b და c ერთი წვეროდან გამოსული სამი წიბოს სიგრძეებია. მოსწავლეები ადვილად დაასახელებენ წერტილებს, რომლებიც, მაგალითად, $A_1B_1C_1D_1$ მართკუთხედის სიბრტყეს ეკუთვნის: უპირველესად, წერტილები: A_1, B_1, C_1 და D_1. კიდევ უნდა დასახელდეს O_1 წერტილი. ამ ამოცანის ამოხსნა არცერთ მოსწავლეს არ უნდა გაუჭირდეს.

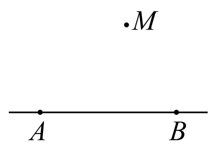
(5) მოსწავლეებმა უნდა გამოამჟღავნონ პირამიდის ელემენტების ცოდნა და ადვილად უპასუხებენ კითხვებს.

(6)



თუ A, B და C წერტილები ერთ წრფეს არ ეკუთვნის, არსებობს ერთადერთი სიბრტყე, რომელსაც ეს წერტილები ეკუთვნის. ამ სიბრტყეს ეკუთვნის სამივე წრფე, AB, AC და BC.

△5 ა) წრფეზე ავიღოთ ორი წერტილი, A და B; A, B და M წერტილებზე გადის ერთადერთი სიბრტყე, რომელსაც ეკუთვნის AB წრფე და M წერტილი — ჭეშმარიტია.



ბ) მოცემულ წრფეზე, ცხადია, უამრავი, სიბრტყე გადის. ამის ახსნას შეძლებენ მოსწავლეები (წრფის გარეთ სივრცეში შეიძლება ავიღოთ სხვადასხვა წერტილი).

△7 MN წრფეს α სიბრტყესთან, რომელიც გადის AB და CD წრფეებზე, ორი საერთო წერტილი აქვს. ამიტომ MN ძევს α სიბრტყეზე.

△8 მოსწავლემ უნდა გამოიყენოს აცდენილი წრფეების, გადამკვეთი წრფეებისა და წრფისა და სიბრტყის ურთიერთგანლაგების შემთხვევების განსაზღვრებები.

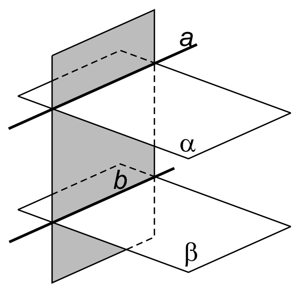
6.5 წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა

წარმოდგენილია წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშანი და ამ დებულების შებრუნებული დებულება. დამტკიცებული თეორემების გამოყენებით, მოცემულია სივრცული ფიგურის კვეთების აგების მაგალითები. წინარე ცოდნის გააქტიურება სივრცეში წრფეების, წრფეებისა და სიბრტყეების ურთიერთგანლაგების შემთხვევების განხილვას უკავშირდება.

წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშანს საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით ვამტკიცებთ. მივაქციოთ მოსწავლეთა ყურადღება იმას, რომ, დასკვნის გაკეთებისას, უნდა მიუთითოს ის განსაზღვრება, აქსიომა, ან ადრე დამტკიცებული დებულება, რომლიდანაც ეს დასკვნა კეთდება. მაგალითად, როცა დავუშვებთ, რომ a წრფე არ არის α სიბრტყის პარალელური და კვეთს α-ს C წერტილში, მაშინ C იქნება α-სა და იმ β სიბრტყის საერთო წერტილი, რომელიც a და b პარალელურ წრფეებზე გადის. ასეთი წერტილების სიმრავლე კი წრფეა — b წრფეა. მივიღებთ წინააღმდეგობას, a და b პარალელურ წრფეებს საერთო წერტილი აქვს (C წერტილი). თეორემა ეკვივალენტური სახითაც არის ჩამოყალიბებული — მოცემული თეორემის შებრუნებულის მოპირდაპირეც ჭეშმარიტია (კონტრაპოზიციური). მტკიცდება მოცემული თეორემის შებრუნებული თეორემაც.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

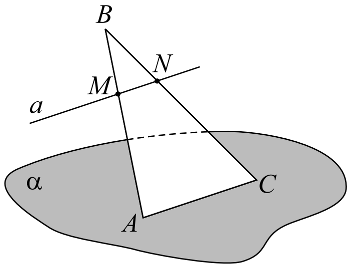
(3) ა) $DC||AB$, ამიტომ $DC||(AMB)$;
(AMB)-თი აღვნიშნეთ A, M და B წერტილებზე გამავალი სიბრტყე.
ბ) $BC||AD$, ამიტომ $BC||(AMD)$;
გ) $AB||DC$, ამიტომ $AD||(DMC)$.



(4) მოსწავლემ უნდა შეძლოს კონტრმაგალითების აგება, როცა $a\in\alpha$, $b\in\beta$, მაგრამ a და b ერთ სიბრტყეს ეკუთვნის (მაგალითად, პარალელური წრფეებია).

თუმცა, ისიც შეიძლება, რომ a წრფე ეკუთვნოდეს α სიბრტყეს და არ ეკუთვნოდეს არც ერთ სიბრტყეს, რომელსაც ეკუთვნის b. ასეთია, მაგალითად, (3) ამოცანის ნახაზზე წარმოდგენილი DC და AM წრფეები.

(5) ა) გამოვიყენოთ დამტკიცებული თეორემა: $a||\alpha$, a წრფე ეკუთვნის (ABC) სიბრტყეს, ეს სიბრტყე და α სიბრტყე იკვეთება AC წრფეზე, ამიტომ $a||AC$, ანუ $MN||AC$.



ბ) $MN=12$ სმ,

$MB=\frac{2}{3}AB.$

ვიპოვოთ AC.

$\Delta MBN \sim \Delta ABC$, $\frac{AC}{MN}=\frac{AB}{MB}$,

$AC=12\cdot\frac{3}{2}=18$ (სმ).

გ) $AC=20$ სმ, $BM:AM=4:1$, ვიპოვოთ MN.

$\frac{AC}{MN}=\frac{AB}{MB}$, $\frac{AC}{MN}=\frac{5}{4}$,

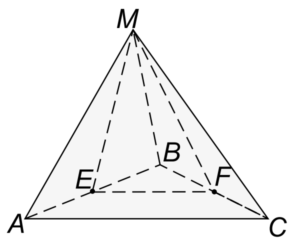
$MN=20\cdot\frac{4}{5}=16$ (სმ).

(6) წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის შესახებ თეორემის თანახმად, $a||\beta$. აქ უკვე შეგვიძლია შებრუნებული თეორემის გამოყენება — $c||a$. ანალოგიურად, $c||b$.

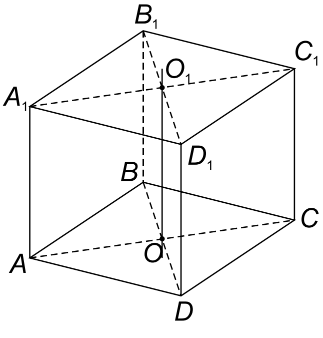
მოსწავლემ უნდა შეძლოს მართკუთხა პარალელეპიპედის გამოსახულებისა და სივრცეში წრფეებსა და სიბრტყეებს შორის მიმართებების განსაზღვრებების გამოყენებით, დაასახელოს △3 — △5 ამოცანებში მითითებული სიბრტყეები.

△6 ა) აქ ვიყენებთ დამტკიცებულ თეორემას — $AC||(MEF)$, ამიტომ $AC||EF$.

ბ) ანალოგიური ამოცანა კლასში იყო ამოხსნილი. საძიებელი სიდიდეების საპოვნელად, ვიყენებთ სამკუთხედების მსგავსებას: $\Delta BEF \sim \Delta BAC$.



△7 ა) არ შეიძლება. კუბს ოთხ-ოთხი წიბო პარალელური აქვს და ერთ-ერთის პარალელური წრფე დანარჩენების პარალელურიც არის.



ბ) შეიძლება. მაგალითად, AA_1 წრფე პარალელურია მხოლოდ BB_1, CC_1 და DD_1 წიბოების.

გ) შეიძლება; მაგალითად, OO_1 წრფე, სადაც O და O_1 წერტილები კუბის რომელიმე ორი მოპირდაპირე წახნაგის ცენტრებია;

დ) არ შეიძლება, ხუთი პარალელური წიბო კუბს არ აქვს.

ე) შეიძლება. მაგალითად, AD_1 წრფე მხოლოდ BC_1 დიაგონალის პარალელურია.

6.6 წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი

წინარე ცოდნის გააქტიურება დაკავშირებულია სივრცეში და სიბრტყეზე გეომეტრიული ფიგურების ურთიერთგანლაგების შემთხვევების შესახებ ცოდნის გამეორებასთან. ყურადღებას ვამახვილებთ წრფეების ურთიერთგანლაგების შემთხვევების განხილვაზე; ორ წრფეს შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ 1 საერთო წერტილი; ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ წრფეები იკვეთება. ორ წრფეს შორის კუთხე კი გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან უმცირეს კუთხეს ეწოდება. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხივე კუთხე შეიძლება მართი იყოს; ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ წრფეები მართობულია (ურთიერთმართობულია). ამის შემდეგ გადავდივართ წრფისა და სიბრტყის ურთიერთგანლაგების შემთხვევების განხილვაზე და განვსაზღვრავთ წრფისა და სიბრტყის მართობულობას — წრფეს ეწოდება სიბრტყის მართობული, თუ ეს წრფე მართობულია წრფისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილზე გავლებული და სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი წრფის. ამის შემდეგ მოსწავლეებმა შეიძლება გამოთქვან ვარაუდი, რომ საკმარისია წრფე მართობული იყოს გადაკვეთის წერტილზე გამავალი ორი წრფის, რომ ის მართობული იქნება ნებისმიერი წრფის, რომელიც გადაკვეთის წერტილზე გადის, მაშასადამე — სიბრტყის. ამ ვარაუდამდე მისვლა შესაძლებელია სახელმძღვანელოში აღწერილი შემთხვევის თვალსაჩინო წარმოდგენით დავიწყოთ და გადავიდეთ c წრფის მართობული ორი წრფის დემონსტრირებაზე.

მოსწავლეები თეორემის დამტკიცების პროცესში მონაწილეობენ; თუმცა, აუცილებელია, მასწავლებელმა წარმართოს ეს პროცესი და კითხვების საშუალებით მიიყვანოს მოსწავლეები საჭირო დასკვნებამდე. მოსწავლეები, მასწავლებლის მითითებით, იხსენებენ თეორემებს, რომლებიც დამტკიცების პროცესში გამოიყენება: სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები, მონაკვეთის შუამართობის თვისება. თუმცა, ზოგჯერ შეიძლება უკარნახოთ საჭირო მოქმედებების ჩატარების აუცილებლობა — $m\perp a$, $m\perp b$; უ. დ. $m\perp x$. ხომ არ დავუკავშიროთ დამტკიცების პროცესი სამკუთხედების მონაკვეთებს? ამისთვის გადავზომოთ: $MA_1=MA_2$; შევარჩიოთ რაიმე A და B წერტილები, შესაბამისად, a და b წრფეებზე, X წერტილი არის x წრფის AB წრფესთან გადაკვეთის წერტილი. ახლა შეგვიძლია გარკვეული თანამიმდევრობით განვიხილოთ სამკუთხედები და ამ განხილვის კვალობაზე მივიდეთ სასურველ შედეგამდე. სახელდობრ მთავარია, თავიდან შეირჩეს სამკუთხედების წყვილი, რომელთა შესახებ შეიძლება ტოლობის საკითხის განხილვა. ეს სამკუთხედებია ΔA_1AB და ΔA_2AB. III ნიშნის თანახმად, სახელმძღვანელოში აღწერილია მათი ტოლობის დამტკიცება.

მაშასადამე, $\angle A_1BX=\angle A_2BX$;

შედეგი: $\Delta A_1BX=\Delta A_2BX$ (I ნიშნით).

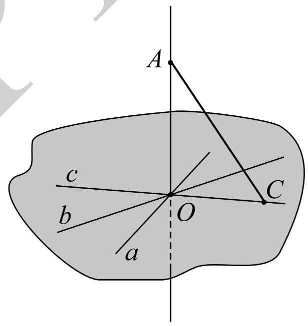
მოსწავლეები ადვილად მიიყვანენ დამტკიცებას ბოლომდე. შეიძლება ჩაატაროთ ექსპერიმენტი: მოსწავლეებს დაავალოთ სახელმძღვანელოში გაეცნონ ამ დებულების დამტკიცებას და შემდეგ საჯარო განხილვით წარმოადგინონ ეს დამტკიცება.

გადავდივართ კიდევ ერთი დაბულების განხილვაზე — წრფისა და სიბრტყის მართობულობის II ნიშნის განხილვაზე. ამ დებულების ჩამოყალიბების შემდეგ მოსწავლეებთან ერთად ვმსჯელობთ ამ ნიშნის ინტერპრეტაციებზე ყოველდღიურ ცხოვრებაში.

სასურველია, სახელმძღვანელოში „ს“ (სხვადასხვა) რუბრიკით წარმოდგენილი ტექსტის გამოყენებით, ვისაუბროთ ქართული მათემატიკური ტერმინების შესახებ.

ამოცანების საშუალებით, განვამტკიცებთ ცოდნას წრფისა და სიბრტყის მართობულობის პირობების შესახებ. წრფისა და სიბრტყის მართობულობის განსაზღვრებისა და წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშნების გამოყენებით მოსწავლეები ადვილად შეარჩევენ სწორ პასუხებს „ტესტებში“ (და შეძლებენ კიდეც არჩევანის დასაბუთებას).

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:



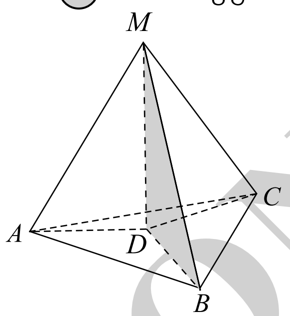
(6) $AO\perp a$, $AO\perp b$, ამიტომ, წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშნის თანახმად, $AO\perp\alpha$; მაშასადამე, $AO\perp c$.

პითაგორას თეორემის გამოყენებით,

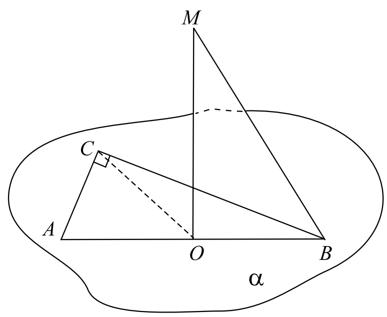
$AC^2=AO^2+OC^2=18^2+24^2$,

$AC=\sqrt{900}=30$ (სმ).

(7) MD ფუძის სიბრტყის მართობულია, მაშასადამე, $MD\perp BD$; ΔMBD-დან, $MB^2=7^2+8^2=49+64=113$.



ამ ამოცანის განხილვისას, შეიძლება ვისაუბროთ პირამიდის სიმაღლის შესახებ — MD წრფე კვეთს ABC სამკუთხედის სიბრტყეს და MD ამ სიბრტყის მართობულია, MD არის $MABC$ პირამიდის სიმაღლე. თუ საჭირო იქნება პირამიდის მოცულობის გამოთვლა, მაშინ $V=\frac{1}{3}Q\cdot H$ ფორმულაში, $H=MD$, Q – ABC სამკუთხედის ფართობია.

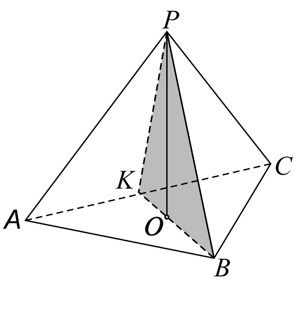


(8) $OM=15$ სმ, $AB=16$ სმ. $OM\perp\alpha$, ამიტომ $OM\perp AB$.

ΔMOB მართკუთხაა, $MB=\sqrt{15^2+8^2}=17$ (სმ).

თუ გავითვალისწინებთ, რომ O არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი, $AO=OB=OC$, ამიტომ $MC=MA=MB=17$ (სმ).

(9) ა) პირობის თანახმად, მკვეთი სიბრტყე AC წრფის მართობულია. ამიტომ AC წრფე მართობულია ყველა იმ წრფის, რომელიც მკვეთ სიბრტყეს ეკუთვნის და მკვეთი სიბრტყისა და AC წრფის გადაკვეთის K წერტილზე გადის. ამიტომ $OK\perp AC$ ($BK\perp AC$); BK არის ABC სამკუთხედის სიმაღლე, K არის AC-ს შუაწერტილი, ე. ი. PK არის APC სამკუთხედის სიმაღლე, კვეთა PKB სამკუთხედია.



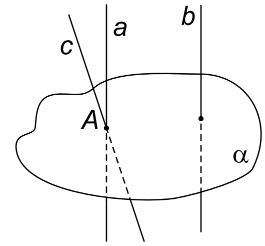
ბ) ფართ(ΔPBK)$=\frac{1}{2}PO\cdot BK$,

$BK=BC\sin 60^0=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$ (სმ),

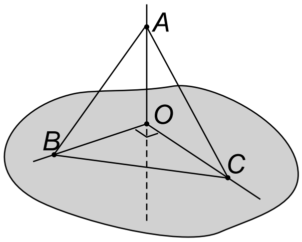
$PO=\sqrt{PB^2-BO^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-\left(\frac{2}{3}\cdot 3\right)^2}=2\sqrt{2}$.

ფართ(ΔPBK)$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3=3\sqrt{2}$ (სმ^2).

6 დავუშვათ საწინააღმდეგო, a არ არის b წრფის პარალელური. მაშინ A წერტილზე შეიძლება გავავლოთ სხვა c წრფე, რომელიც არის b წრფის პარალელური. მაშინ მივიღებთ, რომ $c \perp \alpha$, რაც, ცხადია, შეუძლებელია (A წერტილზე შეუძლებელია ამ სიბრტყის მართობული ორი წრფის გავლება).



7



AOB, AOC და BOC ტოლი მართკუთხა სამკუთხედებია;
$AO=BO=OC=2$,
$AB=BC=AC=2\sqrt{2}$
$P_{ABC}=6\sqrt{2}$ (დმ).

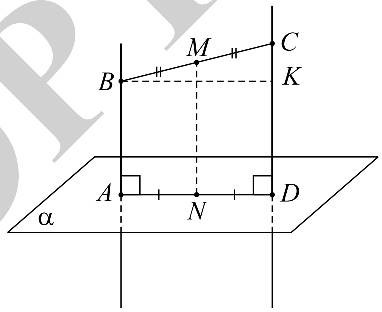
8 ა) $ABCD$ მართკუთხა ტრაპეციაა, რადგან $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $AB \perp AD$, $CD \perp AD$.

ბ) MN ტრაპეციის შუახაზია;

$MN=\dfrac{6{,}2+10{,}4}{2}=8{,}3$ (სმ).

გ) $\angle C=60^0$, ამიტომ $AD=BK=(10{,}4-6{,}2)tg60^0=4{,}2\sqrt{3}$ (სმ)

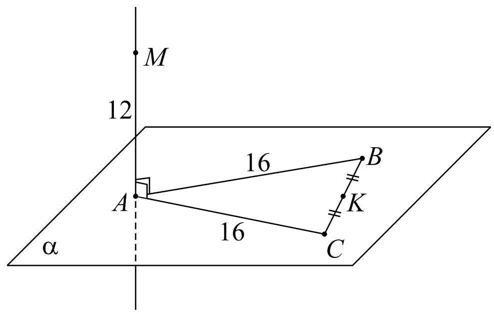
$S_{ABCD}=MN \cdot AD=8{,}3 \cdot 4{,}2\sqrt{3}=34{,}86\sqrt{3}$ (სმ^2).

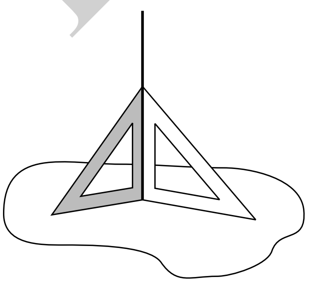


9 ეს დებულება ადვილად მტკიცდება, თუმცა ძალიან მნიშვნელოვანია — ხშირად გამოიყენება ამოცანების ამოხსნისას.

AMO, BMO და CMO ტოლი მართკუთხა სამკუთხედებია, $AM=BM=CM=\sqrt{R^2+OM^2}$, R არის სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

10 $MB=MC=\sqrt{12^2+16^2}=20$ (სმ).
$CK=KB=6$ სმ,
$AK^2=16^2-6^2=220$,
$MK=\sqrt{12^2+220}=\sqrt{364}=2\sqrt{91}$ (სმ).

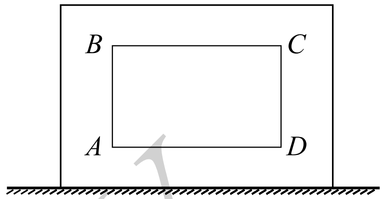




ჯგუფური მუშაობის პირველი ამოცანა ითვალისწინებს წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშნის გამოყენებას — სურათზე ამ თეორემის გამოყენებით, ვერტიკალური ძელის აღმართვის ერთ-ერთი შესაძლებელი გზაა გამოსახული.

ხარიხას ჰორიზონტალურად გავდებთ, თუ მას მივამაგრებთ ძელების იმ წერტილებში, რომლებიც მიწის ზედაპირიდან თანაბრადაა დაშორებული.

(2) შვეულისა და თოკის საშუალებით შესაძლებელია A და D წერტილების a წრფიდან (მიწის დონიდან) დაშორების შედარება — მათი ტოლობის შემოწმება. ამასთანავე, საჭიროა შემოწმდეს AB და CD-ს ვერტიკალურობაც (შვეულობა). აგრეთვე, AB და CD მონაკვეთების ტოლობაც. ყველა ამ პირობის შესრულება საკმარისია ეჭვის გასაქარწყლებლად.



6.7 ორი სიბრტყის პარალელურობა

წინარე ცოდნის გააქტიურება იწყება სივრცეში წრფეების, წრფისა და სიბრტყის და ორი სიბრტყის ურთიერთგანლაგების შემთხვევების განხილვით. ყურადღებას ვამახვილებთ სიბრტყეების შემთხვევაზე და აღვნიშნავთ, რომ, თუ ორ სიბრტყეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ სიბრტყეებს საერთო წრფე აქვს. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ სიბრტყეები ერთმანეთს წრფეზე კვეთს. თუ ორ სიბრტყეს საერთო წერტილი არ აქვს, ასეთ სიბრტყეებს პარალელური სიბრტყეები ეწოდება. გაკვეთილის მიზანია გავეცნოთ თეორემებს, რომლებიც ორი სიბრტყის პარალელურობის საკმარისი ნიშნებია. ერთ-ერთი თეორემა დამტკიცებითაა მოყვანილი. დამტკიცება მოსწავლეების მონაწილეობით კითხვა-პასუხის რეჟიმში შეიძლება განვახორციელოთ; ის მიმდინარეობს იმ მეთოდით, რომლის გამოყენებასაც ყველა მოსწავლე უკვე მიეჩვია — საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხით.

— დავუშვათ საწინააღმდეგო, მაშასადამე ... ამ წინადადების საწყის ნაწილს მასწავლებელი ამბობს, მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ წინადადების დასრულება:

— მაშასადამე, სიბრტყეები ($ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$) იკვეთება, საერთო წერტილი აქვს, ე. ი. ისინი წრფეზე იკვეთება.

ეს უკვე წინადადების სრული ფორმულირებაა. მოსწავლემ უნდა შეძლოს, სიბრტყეების ურთიერთგანლაგების შემთხვევების გააზრება და საერთო წერტილის არსებობის შემთხვევაში საერთო წრფის არსებობის აღნიშვნაც. ამის შემდეგ წინააღმდეგობამდე ადვილად მივდივართ, აღმოჩნდება, რომ ამ ორი სიბრტყის გადაკვეთის წრფე პარალელურია გადამკვეთი AB და BC წრფეების, რაც შეუძლებელია. თეორემის მნიშვნელობას მისი პრაქტიკული გამოყენების მაგალითის ჩვენებით ვადასტურებთ.

სურათის მიხედვით, ნებისმიერი სიბრტყეების შემთხვევაში, მოსწავლეები ასე ასაბუთებენ დებულებას: თუ სიბრტყეები იკვეთება m წრფეზე, მაშინ ეს წრფე პარალელური იქნება გადამკვეთი a და b წრფეების, რაც შეუძლებელია.

თეორემების შინაარსის გააზრებას ხელს უწყობს „ტესტებში“ სწორი პასუხების მოძიება.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

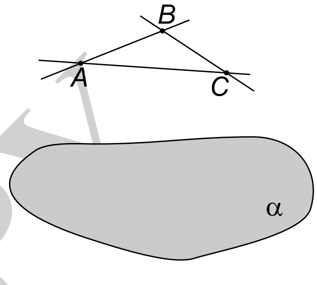
(5) ა) $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$, რადგან $AB||A_1B_1$ და $BC||B_1C_1$; AA_1B_1B და DD_1C_1C; AA_1D_1D და BB_1C_1C.

ბ) AA_1D_1D და $A_1B_1C_1D_1$ იკვეთება A_1D_1-ზე;

$ABCD$ და AA_1B_1B იკვეთება AB-ზე;

DD_1C_1C და BB_1C_1C იკვეთება C_1C-ზე.

(6) ABC სიბრტყე არის α სიბრტყის პარალელური. მართლაც, თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს — სიბრტყეები იკვეთება d წრფეზე, მაშინ AB და BC გადამკვეთი წრფეები იქნება d წრფის პარალელური.



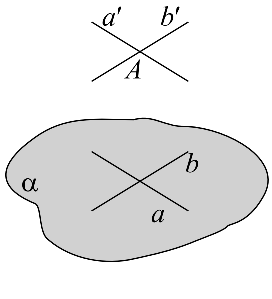
მოსწავლემ შეიძლება ასე იმსჯელოს: A, B და C წერტილებზე შეიძლება გავავლოთ ერთადერთი სიბრტყე (აქსიომა); შემდეგ გამოვიყენოთ დამტკიცებული თეორემა.

(7) ა) ცხადია, პარალელური წახნაგებია: AA_1D_1D და BB_1C_1C; BB_1A_1A და CC_1D_1D; $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$.

ბ) $AB_1||DC_1$, $B_1C||A_1D$, ამიტომ AB_1C და A_1DC_1 სიბრტყეები პარალელურია.

(8) ერთ-ერთი წრფის, მაგალითად, a წრფის, წერტილზე შეიძლება გავავლოთ მეორე წრფის, b წრფის, პარალელური c წრფე. a და c გადამკვეთ წრფეებზე გავავლებთ α სიბრტყეს. ანალოგიურად, b წრფეზე აღებულ წერტილზე გავავლებთ a წრფის პარალელურ β სიბრტყეს. მაშინ a||β.

(9) α სიბრტყეზე გავავლოთ ურთიერთგადამკვეთი a და b წრფეები. A წერტილზე გავავლებთ: $a'||a$; $b'||b$. მაშინ a' და b'-ზე გამავალი სიბრტყე პარალელურია α სიბრტყის.



(10) ა) $AB=AC+BC=12{,}3$ (სმ);

ბ) $AB=AC-BC=3{,}4-2{,}1=1{,}3$ (დმ).

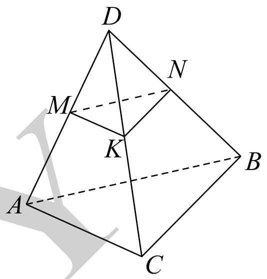
△7 დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, AC და A_1C_1 პარალელური არ არის. ისინი ერთ სიბრტყეზეა, მაშასადამე, იკვეთება, ეს კი შეუძლებელია — α||β. მაშასადამე, $AC||A_1C_1$. ანალოგიურად, დავამტკიცებთ: $AB||A_1B_1$ და $BC||B_1C_1$.

მაშასადამე, AA_1B_1B; AA_1C_1C; BB_1C_1C პარალელოგრამებია, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$ და $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$, საიდანაც, $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$.

8 ა) თუ $MK||AC$, $MN||AB$, მაშინ MNK სიბრტყე, ანუ α სიბრტყე, პარალელურია ABC სიბრტყის.

ბ) MNK სიბრტყის M და N წერტილები ეკუთვნის DAB სიბრტყეს, ამიტომ შეუძლებელია ეს ორი სიბრტყე იყოს პარალელური. ეს ორი სიბრტყე ემთხვევა ერთმანეთს, როცა K წერტილი ემთხვევა D წერტილს;

გ) α სიბრტყე DB წრფის მართობულია, თუ $KN \perp DB$ და $MN \perp DB$.



6.8 თეორემა სამი მართობის შესახებ

წრფისა და სიბრტყის ურთიერთგანლაგების შესახებ ცოდნის გამეორებისა და სიბრტყეთა პარალელურობის თეორემის გამოყენებაზე ამოცანების ამოხსნების განხილვის შემდეგ გადავდივართ ძალიან მნიშვნელოვან ცნებებზე: სიბრტყისადმი გავლებული მართობი, დახრილი, დახრილის გეგმილი. წინარე ცოდნის გააქტიურება პლანიმეტრიიდან ანალოგიური ცნებების გამეორებასაც უკავშირდება. ამჯერად, დაგვჭირდება წრფისა და სიბრტყის მართობულობისა და ამ მართობულობის შესახებ თეორემის გამეორება. ამ თეორემის საფუძველზე მტკიცდება სტერეომეტრიის მნიშვნელოვანი თეორემები, თეორემები სამი მართობის შესახებ — ასე მოვიხსენიეთ ორი თეორემა (პირდაპირი და შებრუნებული) სამი მართობის შესახებ, რომლებიც თავს იყრის სიბრტყეზე გავლებული წრფის ერთ წერტილთან (სურათზე — C წერტილთან).

ჯერ მტკიცდება I ნაწილი — სიბრტყეზე მდებარე წრფის მართობულობიდან დახრილის გეგმილის მიმართ გამომდინარეობს მართობულობა დახრილის მიმართ.

დამტკიცება არ არის რთული და მოსწავლეები შეძლებენ მის გააზრებას — ვიყენებთ მოცემულ წერტილზე მოცემული წრფის პარალელური წრფის გავლების შესაძლებლობას. გავლებული წრფე მართობული იქნება α სიბრტყის. მოსწავლეებმა უნდა დაასახელონ შესაბამისი თეორემა. შედეგად ვღებულობთ: $A'C \perp \alpha$.

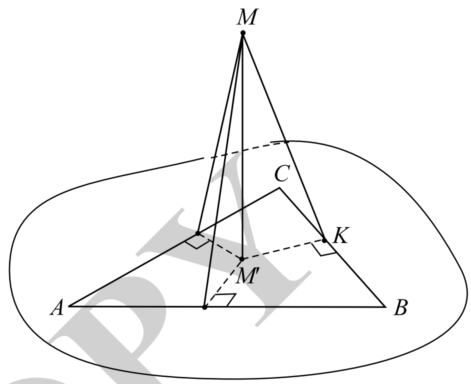
შემდეგი ნაბიჯის განხორციელებაში შეიძლება დავეხმაროთ მოსწავლეებს (β სიბრტყის გავლება). რის შემდეგ, მოსწავლეები ადვილად მიიყვანენ დამტკიცებას ბოლომდე. ამასთანავე, შებრუნებული თეორემის დამტკიცებაც ამ სიბრტყის გავლებას ეფუძნება.

სამი მართობის შესახებ თეორემები გამოიყენება გეომეტრიული ფიგურების ნაწილებს შორის თანაფარდობების აღმოჩენაში. პირველი გამოყენებებიც, რომლებიც „ტესტებშია“ წარმოდგენილი, გეომეტრიულ ფიგურებს უკავშირდება.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ მართობისა და დახრილის შესახებ ამოცანების ამოხსნა (1-10), ძირითადად, პითაგორას თეორემას ვიყენებთ.

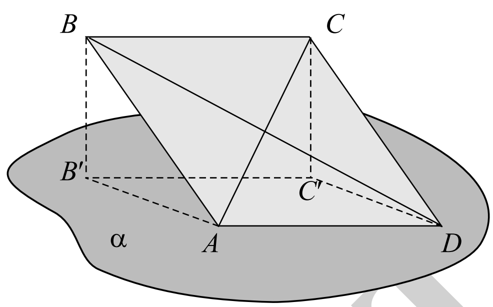
სამი მართობის თეორემის გამოყენებით იხსნება შემდეგი ამოცანები:



11 აქ, სამი მართობის შესახებ თეორემის თანახმად, M' წერტილი ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია, მანძილი M' წერტილიდან, მაგალითად, BC გვერდამდე ჩახაზული წრის რადიუსია: $M'K=r$;

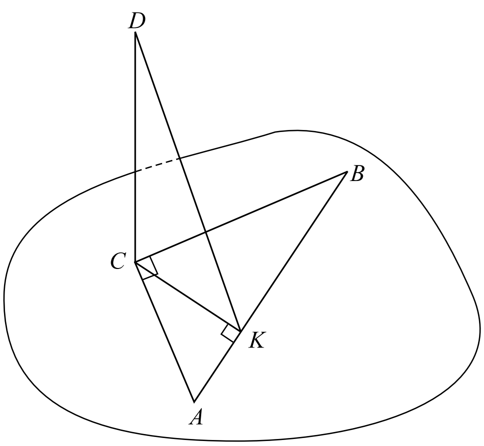
$r^2=3,05^2-0,55^2=(3,05-0,55)(3,05+0,55)=2,5\cdot 3,6=9$; $r=3$.

14



$BB'=2$ მ,
$B'D=4$ მ,
$AC'=1$ მ.

ამ ამოცანაში მართობითა და გეგმილებით ვპოულობთ რომბის დიაგონალებს. რომბის გვერდის პოვნა სხვადასხვა ხერხით შეიძლება — გვერდის კვადრატი დიაგონალების ნახევრების კვადრატების ჯამია, გვერდის კვადრატის გაოთხკეცებული რომბის დიაგონალების კვადრატების ჯამის ტოლია — ეს წინადადები, ფაქტობრივად, ერთსა და იმავე ტოლობას გვაძლევს, მაგრამ სხვადასხვა თეორემის შედეგებია.

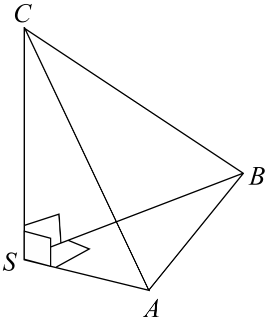


16 ამ ამოცანაში სამი მართობის შესახებ თეორემის გამოყენება გვიწევს.

D წერტილიდან ჰიპოტენუზისადმი გავლებული DK მართობის გეგმილი არის ABC სამკუთხედის C მართი კუთხის წვეროდან გავლებული CK სიმაღლე.

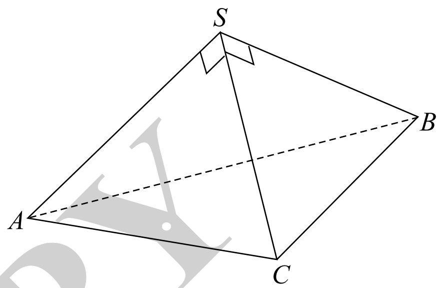
17 თუ პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია, მაშინ პირამიდის სიმაღლის შემცველი წრფე გაივლის ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრზე. კლასში მკაფიოდ უნდა აღვწეროთ და გავარჩიოთ ეს ფაქტი.

18 თუ მივიჩნევთ, რომ მოცემული $SABC$ პირამიდის წვერო არის C წერტილი, მაშინ ფუძე SAB მართკუთხა სამკუთხედია, ხოლო პირამიდის სიმაღლე იქნება CS, რადგან $CS \perp AS$, $CS \perp BS$. მაშასადამე, $CS \perp (SAB)$,



$V=\frac{1}{3} \cdot$ფართ.$\Delta SAB \cdot CS$.

$V=\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AS \cdot BS \cdot CS=\frac{1}{6} \cdot AS \cdot BS \cdot CS$.

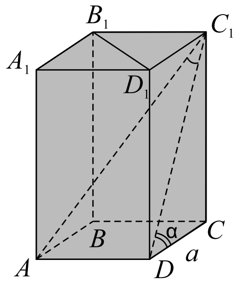


19 ფუძის გვერდი აღვნიშნოთ a-თი, მაშინ $C_1C=a\mathrm{tg}\alpha$, $C_1C=2a$.

ამ შემთხვევაშიც, სამი მართობის შესახებ თეორემას ვიყენებთ: $\angle ADC_1=90^0$;

ცხადია, $DC_1=\dfrac{a}{cos\alpha}=a\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=a\sqrt{5}$.

ΔAC_1D-დან, $cos\angle AC_1D=\dfrac{DC_1}{AC_1}=\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2a^2+4a^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

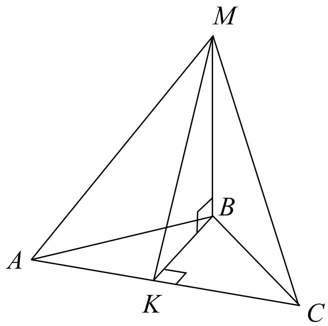


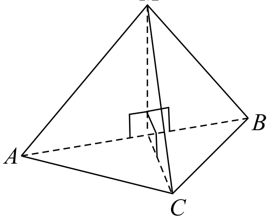
20 MB სიმაღლეა; $MB=16$ სმ.

სამი მართობის შესახებ თეორემის თანახმად, AMC სამკუთხედის სიმაღლის (ფუძისადმი გავლებული დახრილი) გეგმილი ABC სამკუთხედის B წვეროდან გავლებული BK სიმაღლეა, $BK=\sqrt{50^2-40^2}=30$ (სმ).

$\angle MBK=90^0$ (MB მართობია), ამიტომ $MK=\sqrt{16^2+30^2}=34$ (სმ)

$S_{\text{გვ.}}=\frac{1}{2}AB \cdot BM \cdot 2+\frac{1}{2}AC \cdot MK$.



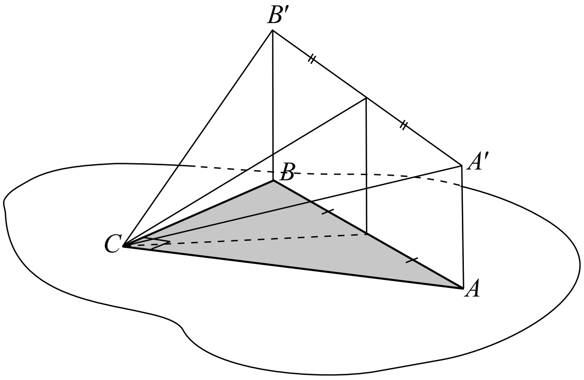


21 თუ პირამიდის ყველა გვერდითი წიბო ტოლია, პირამიდის სიმაღლე გაივლის ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრზე, ამ შემთხვევაში, AB ჰიპოტენუზის შუა წერტილზე.

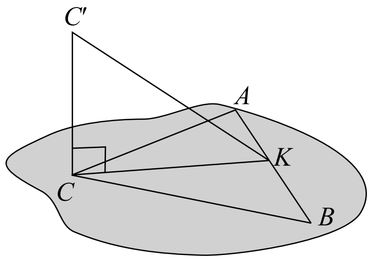
22 საძიებელი სიდიდე $A'B'C$ სამკუთხედის მედიანაა. ამ სამკუთხედის ორი გვერდი ცნობილია. მესამე გვერდსაც ვიპოვით პითაგორას თეორემის რამდენჯერმე გამოყენებით. თუმცა, შეიძლება სხვა ხერხით ამოვხსნათ: $A'B'$-ის შუა წერტილიდან AB ჰიპოტენუზაზე დავუშვათ სიმაღლე — მართობი ABC სიბრტყისადმი, მაშინ მედიანის გეგმილი იქნება ABC მართკუთხა სამკუთხედის C წვეროდან გავლებული მედიანა; AB ჰიპოტენუზას კათეტებით ვიპოვით.

მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებს პითაგორას თეორემით ვიპოვით:

$AC=\sqrt{2^2-1,5^2}$, $BC=\sqrt{3^2-1^2}$.



კლასში ყველა ამოცანის დაწვრილებითი გარჩევისა და მნიშვნელოვანი მომენტების გამოყოფის შემდეგ, მოსწავლეებს არ უნდა გაუჭირდეთ საშინაო დავალების შესრულება. მნიშვნელოვან მომენტებად შეიძლება ჩაითვალოს სამი მართობის თეორემის გამოყენების შემთხვევები.

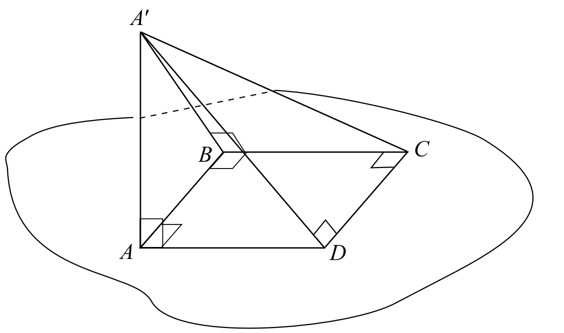


თუ CC' არის ABC სიბრტყისადმი აღმართული მართობი, მაშინ $C'K$, რომელიც AB-ს მართობულია, არის დახრილი, რომლის გეგმილი C წვეროდან AB-სადმი გავლებული სიმაღლეა.

თუ პირამიდის ყველა წიბო ტოლია, მაშინ პირამიდის სიმაღლე დაეშვება ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრში.

თუ სამკუთხა პირამიდის წვეროდან ფუძის გვერდებამდე მანძილები ტოლია, მაშინ პირამიდის სიმაღლე დაეშვება ფუძეში ჩახაზული წრეწირის ცენტრში.

თუ $ABCD$ მართკუთხედია და AA' არის მართკუთხედის სიბრტყისადმი გავლებული მართობი, მაშინ სამი მართობის თეორემის თანახმად, $\angle A'DC=90^0$; $\angle A'BC=90^0$.



23 ამოცანაში ვიყენებთ იმ ხერხს, რომელიც გამოვიყენეთ 18 ამოცანის ამოხსნისას.

6.9 კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. ორწახნაგა კუთხე. ორი სიბრტყის მართობულობა

წინარე ცოდნის გააქტიურება, მართობის, დახრილისა და მისი გეგმილის ცნებების განსაზღვრებების გახსენებით და დაფაზე შესაბამისი ნახაზების, პლაკატების ან ელექტრონული რესურსების წარმოდგენით იწყება. პრაქტიკულ სიტუაციებზე დაყრდნობით, ან აღნიშნული თვალსაჩინოების მიხედვით, ავხსნით წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის ცნებას. ამასთანავე, აღინიშნება, რომ ეს კუთხე შეიძლება იყოს 0^0-ისა და 90^0-ის ტოლიც. მოსწავლეები დაფაზე გამოსახავენ თითოეული შემთხვევის შესაბამის ნახაზს. ძალიან საინტერესოა პრაქტიკული მაგალითი, რომელიც ორი სიბრტყის მართობულობასა და ამ მართობულობის შემოწმებას ეხება. მოსწავლეს არ უნდა შეეშალოს, რომ, ამ შემთხვევაში, პითაგორას თეორემის შებრუნებული გამოიყენება და არა პითაგორას თეორემა.

ორწახნაგა კუთხის განსაზღვრისას, უნდა გავამახვილოთ ყურადღება განსაზღვრების კორექტულობაზე — ხაზოვანი კუთხის სიდიდე არ არის დამოკიდებული წიბოს წერტილის შერჩევაზე. შეიძლება ვისაუბროთ იმ პრაქტიკულ მაგალითზეც, რომელიც რუბრიკით „ს" (სხვადასხვა) არის წარმოდგენილი; აქ ვიხსენებთ სამკუთხედის ამოხსნის ამოცანასაც.

საკონტროლო კითხვებზე პასუხების გაცემით და „ტესტებში" სწორი პასუხების შერჩევით განვიმტკიცებთ ცოდნას მართობის, დახრილის, დახრილის გეგმილისა და დახრილსა და სიბრტყე შორის კუთხეზე; ორი სიბრტყის მართობულობისა და ორწახნაგა კუთხის განსაზღვრებაზე.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

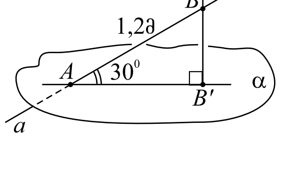
9 ამ ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლეები იყენებენ წრფეებს შორის კუთხის განსაზღვრებას; მაგალითად, A_1C_1 და DC აცდენილ წრფეებს შორის კუთხე არის კუთხე A_1C_1-სა და D_1C_1-ს შორის ($D_1C_1 || DC$).

10 ყოველ გვერდით წახნაგსა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხე 60^0 იქნება; მართკუთხა სამკუთხედიდან, რომლის კათეტი და ჰიპოტენუზაა პირამიდის სიმაღლე და აპოთემა (გვერდითი წახნაგის სიმაღლე), ვიპოვით აპოთემას, შემდეგ ერთ-ერთი გვერდითი წახნაგის ფართობს და ვამრავლებთ 4-ზე.

11 ვიყენებთ წინა ამოცანას — პირამიდის სიმაღლე პირამიდის წვეროდან ფუძის ცენტრში დაეშვება.

12 α სიბრტყეზე AB-ს გეგმილი არის AB';

$AB'=ABcos30^0=1{,}2\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}6\sqrt{3}$ (მ).

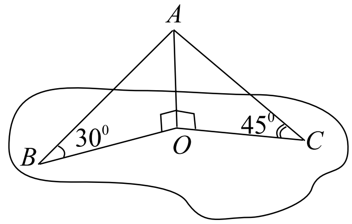


13 $AB=2\cdot7{,}2=14{,}4$ (დმ),

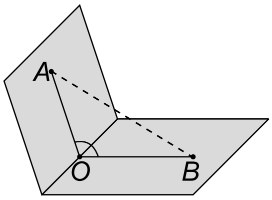
$BO=AB\cos30^0=7{,}2\sqrt{3}$ (დმ),

$AC=OA\cdot\sqrt{2}=7{,}2\sqrt{2}$ (დმ),

$OC=OA=7{,}2$ (დმ).



14



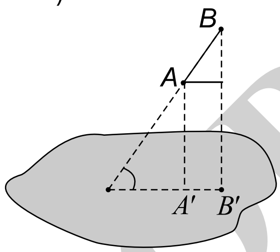
$AB^2=12^2+12^2-2\cdot12^2\cos150^0$

$AB^2=12^2(2+\sqrt{3})$

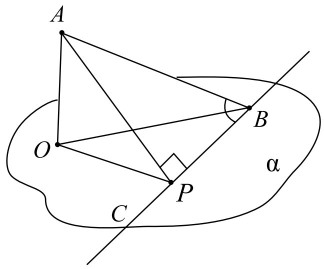
$AB=12\sqrt{2+\sqrt{3}}=12\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{2}}=12\sqrt{\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2 2}{4}}=$

$=6(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ სმ.

15 $A'B'=AB\cos60^0=10\cdot\dfrac{1}{2}=5$ (სმ).



16 $AO=30$ სმ, $\angle ABC=60^0$, $AB=50$ სმ, $AP\perp BC$.
სამი მართობის თეორემის თანახმად, $\angle BPO=90^0$, ამიტომ
$OP=\sqrt{BO^2-BP^2}$.
$BO=\sqrt{50^2-30^2}=40$, $BP=\dfrac{AB}{2}=25$, $OP=5\sqrt{39}$ (სმ).

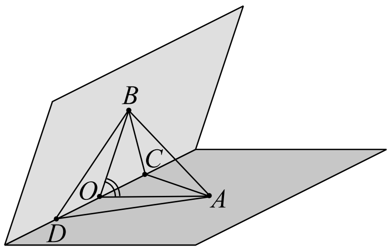


17 ხაზოვანი კუთხე იქნება სიმაღლეებს შორის კუთხე, $\angle BOA$. ვიპოვით სიმაღლეებს.

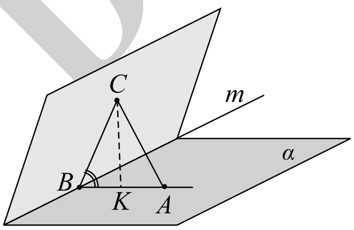
$BO=\sqrt{17^2-8^2}=15$

$OD=AO=8$.

BA-ს ვიპოვით კოსინუსების თეორემის გამოყენებით.



18 ა) $BC\perp m$, $AB\perp m$, $\angle CBA$ ხაზოვანი კუთხეა.
თუ $CK\perp\alpha$, მაშინ BK არის BC-ს გეგმილი α სიბრტეზე და რადგან $m\perp BC$, ამიტომ $m\perp BK$; მაგრამ, პირობის თანახმად, $BA\perp m$. მაშასადამე, K ეკუთვნის BA წრფეს და $CK\perp BA$ — CK არის ABC სამკუთხედის სიმაღლე.



ბ) $BC=15$, $AB=14$, $AC=13$;

ABC სამკუთხედის ფართობი შეიძლება ვიპოვოთ ჰერონის ფორმულით, შემდეგ ვიპოვით CK სიმაღლეს; თუმცა CK-ს პოვნა შეიძლება მხოლოდ პითაგორას თეორემის გამოყენებითაც.

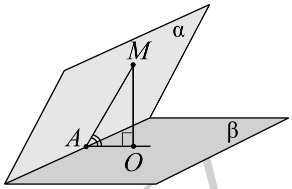
(19) $\angle MAO=30^0$, $\angle MOA=90^0$, $AO=2{,}4$ დმ.

$MO=\dfrac{1}{2}MA$;

თუ $MO=x$, მაშინ $MA=2x$.

$3x^2=2{,}4^2$, $x=0{,}8\sqrt{3}$; $MO=0{,}8\sqrt{3}$ (დმ);

$MA=1{,}6\sqrt{3}$ (დმ).



(20) პირობით, MAB სამკუთხედი მართკუთხაა, $\angle AMB=90^0$. ამიტომ $MB=\sqrt{26^2-24^2}=10$ (სმ).

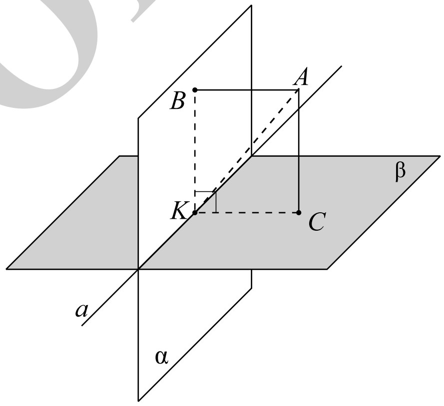
(21) $AB=33$ სმ,

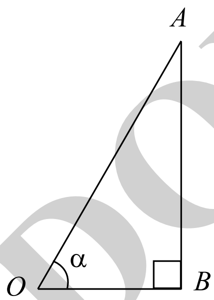
$AC=56$ სმ, $AK\perp a$.

AK დახრილის გეგმილი α სიბრტყეზე არის BK, β-ზე — KC;

ამრიგად, BK, AK და CK გადის K წერტილზე a წრფის მართობულად გავლებულ სიბრტყეზე, $ABKC$ მართკუთხედია.

$AK=\sqrt{33^2+56^2}=65$ (სმ).



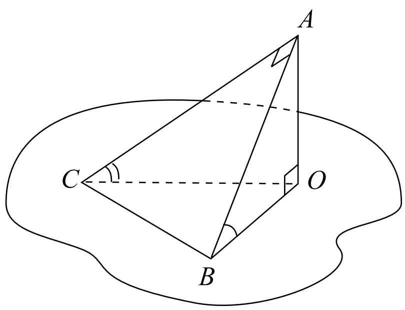


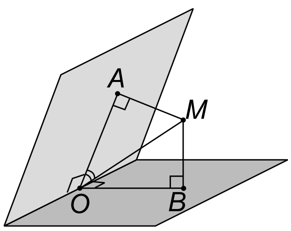
14 $AB=1{,}8$ დმ; $sin\angle AOB=\dfrac{2}{3}$, $AO=\dfrac{1{,}8}{sin\angle AOB}=2{,}7$ (დმ)

$BO=\sqrt{2{,}7^2-1{,}8^2}=0{,}9\sqrt{5}$ (დმ).

15 $BC^2=AC^2+AB^2=\left(\dfrac{8}{sin30^0}\right)^2+\left(\dfrac{8}{sin45^0}\right)^2=384$

$BC=8\sqrt{6}$ (სმ).





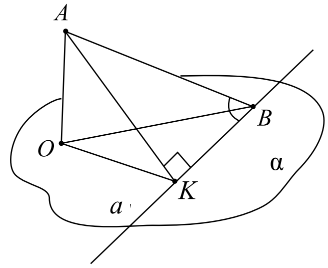
17 $sin\alpha=0{,}6$.

$MO=\dfrac{15}{sin\alpha}=25$ (სმ)

$BO=\sqrt{25^2-7^2}=\sqrt{18\cdot 32}=24$,

$BO=24$ (სმ).

$AO=\sqrt{25^2-15^2}=\sqrt{40\cdot 10}=20$ (სმ).

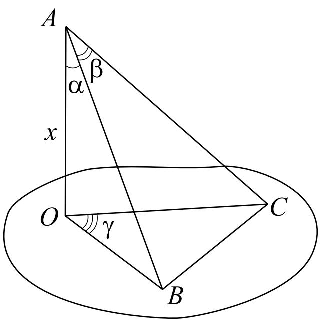


1 სურათზე AB არის α სიბრტყისადმი გავლებული დახრილი, AO — მართობი. პირობით, $\angle ABO=45^0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა, $AO=OB=x$, მაშინ $AB=x\sqrt{2}$. შეიძლება მითითებაც დაგჭირდეთ: — შეეცადეთ, გამოიყენოთ სამი მართობის თეორემა.

ეს მითითება დაეხმარება მოსწავლეებს მოიფიქრონ, რომ

თუ $OK\perp a$, მაშინ $AK\perp a$, $KB=OK=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

$cos\ \angle ABK=\dfrac{x}{\sqrt{2}}:x\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$; $\angle ABK=60^0$.



2 შემოვიღოთ აღნიშვნა, $AO=x$, $\angle BOC=\gamma$.

$OB=OC=xtg\alpha$; $AC=AB=\dfrac{x}{cos\alpha}$.

პირობით, $\angle BAC=\beta$; უნდა ვიპოვოთ $\angle BOC=\gamma$.

$BC^2=2\dfrac{x^2}{cos^2\alpha}-2\dfrac{x^2}{cos^2\alpha}\cdot cos\beta$,

$BC^2=2x^2tg^2\alpha-2x^2tg^2\alpha\cdot cos\gamma$.

მარჯვენა მხარეების გატოლებისა და x^2-ზე შეკვეცის შემდეგ, $cos\gamma$ გამოისახება $cos\alpha$ და $cos\beta$-თი. დადებითად შეფასდება ამოხსნის გზის პოვნა — პარამეტრის შემოტანა, სამკუთხედების განიხილვა, პარამეტრი შეიძლება იყოს მართობის, ან დახრილის სიგრძე.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

ამოცანები დაკავშირებულია სამიზნე ცნებებთან: სიმრავლე, ჭეშმარიტი და მცდარი დებულებები; გეომეტრიული ობიექტები, ზომები; მოსწავლემ უნდა შეძლოს გეომეტრიული ობიექტების თვისებების აღწერა, გეომეტრიულ ობიექტებთან დაკავშირებული სხვადასხვა სიდიდის (სიგრძე, ფართობი, მოცულობა) გამოსათვლელი ფორმულების გამოყენება და ამ სიდიდეების რიცხვითი მნიშვნელობების პოვნა (მათ. საშ. 4). რიცხვით სიმრავლეებს შორის მიმართების დადგენა. სხვადასხვა ხერხის გამოყენება დებულების დასასაბუთებლად.

მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად:

1 $A=\{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19\}$;

$B=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$.

ცხადია, $B\backslash A=\{1;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9\}$

$n(B\backslash A)=5$.

(2) გ) $\overline{M\cup R}$ — ეს სიმრავლე $\overline{M}\cap\overline{R}$ სიმრავლის ტოლია, იმ ოთხკუთხედების სიმრავლე, რომლებიც არც მართკუთხედია და არც რომბი — ოთხკუთხედები, რომლებსაც ორი მაინც განსხვავებული სიგრძის გვერდი აქვს და ერთი კუთხე მაინც არ არის მართი.

(3) ა) $p \to q$: „თუ a და b რაციონალური რიცხვებია, მაშინ $a\cdot b$ ნამრავლი რაციონალური რიცხვია". ეს დებულება ჭეშმარიტია.

ბ) $q \to p$: „თუ $a\cdot b$ ნამრავლი რაციონალური რიცხვია, მაშინ a და b რაციონალური რიცხვებია". დებულება მცდარია, მაგალითად, თუ $a=\sqrt{2}$; $b=2\sqrt{2}$; მაშინ $ab=4$; ab — რაციონალური რიცხვია; a და b ირაციონალური რიცხვებია.

(4) ვთქვათ, $A\neq\overline{\overline{A}}$; მაშინ არსებობს x ელემენტი, რომლისთვისაც $x\in A$, მაგრამ $x\notin\overline{\overline{A}}$; მაგრამ, თუ $x\in A$, მაშინ $x\notin\overline{A}$, აქედან გამომდინარეობს, რომ $x\in\overline{\overline{A}}$. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

(5) ა) ეს ამოცანა დაიყვანება სიბრტყეზე წრფის რაიმე წერტილზე ამ წრფის მართობული წრფის გავლებაზე; ეს წრფე ერთადერთია.

ბ) წერტილზე, რომელიც მოცემულ წრფეს არ ეკუთვნის, შეიძლება ამ წრფის პარალელური ერთადერთი წრფის გავლება; ყოველი სიბრტყე, რომელიც ამ წრფეზე გადის, მოცემული წრფის პარალელურია, ანუ ასეთი სიბრტყე უამრავია.

გ) სწორია.

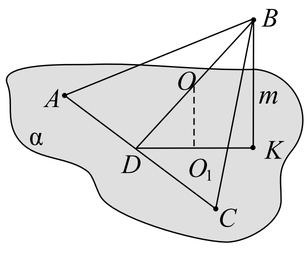
(6) ვიყენებთ ცილინდრის მოცულობის ფორმულას: $V=\pi R^2H$; R რადიუსია, H — სიმაღლე.

მილის მოცულობა იქნება: $V=\pi(R_1^2-R_2^2)H=\pi\cdot 0{,}0055\cdot H$ (მ^3).

H მეტრი სიგრძის მილის მასა,

$H\pi\cdot 0{,}0055\cdot 7500\leq 5\,000$,

საიდანაც მიახლოებით $H\leq 38{,}6$ მ.



(7) $BK=m$.

$DO:DB=1:3$,

$OO_1:m=\frac{1}{3}$

$OO_1=\frac{m}{3}$.

(8) $MO=H$

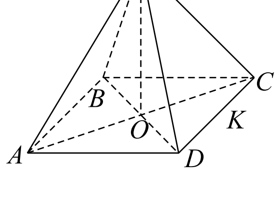
$\angle BMO=30^0$,

$\angle CMO=60^0$,

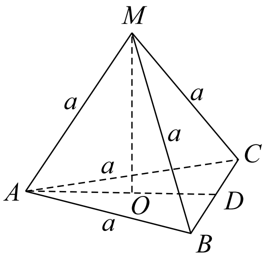
$OC=Htg60^0=H\sqrt{3}$,

$BO=\frac{H}{\sqrt{3}}$;

$V=\frac{1}{3}\cdot Q\cdot H,\ Q=\frac{1}{2}\cdot\frac{2H}{\sqrt{3}}\cdot 2H\sqrt{3},\ V=\frac{2}{3}H^3$.



9



ვთქვათ, $MA=MB=MC=AB=AC=BC=a.$

$$3\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=S$$

$$a^2=\frac{4S}{3\sqrt{3}}=\frac{4S\sqrt{3}}{9}$$

$$AD=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AO=\frac{2}{3}AD=\frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$H^2=a^2-AO^2=a^2-\frac{a^2}{3}=\frac{2}{3}a^2,$$

$$H^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{4S\sqrt{3}}{9}$$

$$H=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{S}\sqrt[4]{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt[4]{108}}{9}\cdot\sqrt{S}.$$

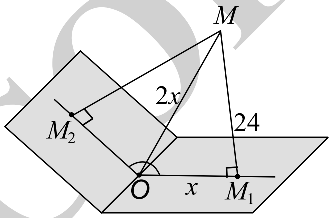
10 $MM_1=24$ სმ, $\angle M_2OM_1=120^0$.

ვთქვათ, $M_1O=x$,

მაშინ $MM_1=24=x\sqrt{3}$, $x=\frac{24}{\sqrt{3}}$;

$MO=2x=\frac{48}{\sqrt{3}}$, $MO=16\sqrt{3}$ (სმ).

$OM_2=OM_1=8\sqrt{3}$ (სმ).

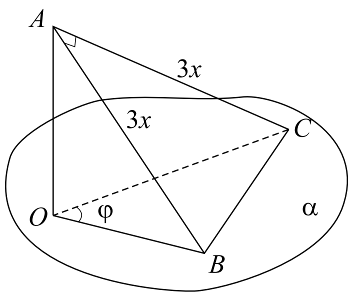


11 შემოვიღოთ აღნიშვნა: $AO=x$, მაშინ $AB=AC=3x$ და $BO=OC=2\sqrt{2}x$.

$\angle BAC=90^0$, BAC სამკუთხედი ტოლფერდა მართკუთხაა, $BC=3x\sqrt{2}$,

$(3x\sqrt{2})^2=2(2\sqrt{2}x)^2-2(2\sqrt{2}x)^2cos\varphi$

$18=16-16cos\varphi;$ $\quad 16cos\varphi=-2;$ $\quad cos\varphi=-\frac{1}{8}.$



შეაფასეთ თქვენი შედეგი

1 ამოცანაში, თუ სწორად აღწერთ *A* და *B* სიმრავლეებს, დაიმსახურებთ 0,5 ქულას; დასახელებული ოთხი დავალებიდან თითოეულში სიმრავლეებზე მოქმედებების ცოდნითა და პასუხის წარმოდგენით — კიდევ 0,5 ქულას. ამოცანა 2,5-ქულიანია.

2 ამოცანაში სიმრავლის დამატების ცოდნა ფასდება 0,5 ქულით; დასახელებული ოთხი დავალებიდან თითოეულში მახასიათებელი თვისების მითითებით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას. ამოცანა 2,5-ქულიანია.

3 ამოცანის თითოეულ დავალებაში მითითებულ დებულებათა კვლევისა და პასუხის დასაბუთებისთვის დაიმსახურებთ 1,5 ქულას, ამოცანა 3-ქულიანია.

(4) ამოცანაში სიმრავლის დამატების ცნების ცოდნით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას; საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის არსის ცოდნით — კიდევ 0,5 ქულას; სიმრავლეთა მოცემული ტოლობის დამტკიცებით — კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 2-ქულიანია.

(5) ამოცანაში ა) და გ) დავალებების შესრულებაში დაიმსახურებთ 0,5-0,5 ქულას, ბ) დავალების შესრულებაში, სათანადო კომენტარებისა და ნახაზის (ან აღწერის) მითითებით — კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 2-ქულიანია.

(6) ამოცანაში მილის მოცულობის გამოსახვა მილის სიგრძის მიხედვით მოგანიჭებთ 1 ქულას, ზომის ერთეულების სწორი შერჩევა — კიდევ 1 ქულას, მილის მასის მილის სიგრძეზე დამოკიდებულების წარმოდგენა — კიდევ 0,5 ქულას, დასმულ ამოცანაზე პასუხის გაცემა — კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 3,5-ქულიანია.

(7) ამოცანაში, თუ შეადგენთ სათანადო ნახაზს და გამოავლენთ იმ პროპორციის ცოდნას, რომლითაც სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი ყოფს მედიანებს, დაიმსახურებთ 1 ქულას, სამკუთხედების მსგავსების გამოყენებით საძებნი მანძილის დადგენით — კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 2-ქულიანია.

(8) ამოცანაში პირამიდის ფუძის თითოეული დიაგონალის H-ით გამოსახვისას დაიმსახურებთ 1 ქულას, ფუძის ფართობის H-ით გამოსახვისას — კიდევ 1 ქულას, პირამიდის მოცულობის H-ით გამოსახვისას — კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 3-ქულიანია.

(9) ამოცანაში პირამიდის წიბოს გამოსახვა S-ით მოგანიჭებთ 1 ქულას, სიმაღლის გამოსახვა S-ით — კიდევ 2 ქულას. ამოცანა 3-ქულიანია.

(10) ამოცანაში ნახაზის სწორად წარმოდგენით დაიმსახურებთ 1 ქულას, MO მანძილის პოვნით — კიდევ 0,5 ქულას, საძიებელი გეგმილის პოვნით — კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 2,5-ქულიანია.

(11) ამოცანაში ერთი უცნობით დახრილების გამოსახვა მოგანიჭებთ 0,5 ქულს, BC-ს და დახრილთა გეგმილების გამოსახვა იმავე უცნობით — კიდევ 1 ქულას, მითითებული კუთხის კოსინუსის დადგენა — კიდევ 1,5 ქულას. ამოცანა 3-ქულიანია.

რამდენი ქულა მიიღეთ?

25-29 ქულა — დავალება შესრულებულია ძალიან კარგად (შეფასება მაღალია);

20-24 ქულა — დავალება შესრულებულია კარგად (შეფასება საშუალოზე მაღალია);

14-19 ქულა — დავალება შესრულებულია ნაწილობრივ (შეფასება საშუალოა);

14-ზე ნაკლები ქულის შემთხვევაში გჭირდებათ უფრო გულმოდგინე მუშაობა (შეფასება დაბალია).

კომპლექსური დავალება საპრეზენტაციო თემა ეხება მათემატიკის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საკითხს, მასში უნდა აისახოს წარმოდგენები სივრცის აღქმის, გეომეტრიის დაფუძნების, სივრცულ ფიგურათა გამოსახვის, მათი ზომების დადგენისა და სიდიდეთა ზომის ერთეულების შესახებ — უნდა ამოიხსნას რამდენიმე კონკრეტული სტერეომეტრიული ამოცანაც.

დავალებაში მკაფიოდაა ჩამოყალილებული ის ორიენტირები, რაზეც უნდა აიგოს პრეზენტაცია, თუმცა, შესაძლებელია, მოსწავლეებმა სხვა, მომიჯნავე საკითხებით გაამდიდრონ თავისი ნაშრომები, რაც ხაზგასმულად უნდა მოუწონოთ მოსწავლეებს.

პრეზენტაცია არასრული იქნება, თუ მასში არ აისახა ისტორიული ცნობები გეომეტრიის, როგორც მეცნიერების წარმოშობისა და განვითარების შესახებ. თანამედროვე მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ტერმინ „აქსიომის“ არსის სწორი გააზრება, მასზე თავდაპირველი და თანამედროვე წარმოდგენების აღწერა უნდა განასხვავებდეს თეორემას აქსიომისგან, მოჰყავდეს საილუსტრაციო მაგალითები.

ნაშრომის ხარისხს განსაზღვრავს სახელმძღვანელოს მასალის, ინტერნეტის საძიებო სისტემების, ან საცნობარო ლიტერატურის გამოყენების დონეც.

მოსწავლეებმა უკვე იციან და ამჯერადაც უნდა ითვალისწინებდნენ, რომ ფასდება არა მხოლოდ წარმოდგენილი მასალის სისრულე და სისწორე, არამედ გადმოცემის ხარისხი, ნაშრომის გაფორმება; დასმულ შეკითხვებზე პასუხების ადეკვატურობა, გამართულობა; დროის რეგლამენტის დაცვა; სხვათა ნაშრომების განხილვაში მონაწილეობა.

პრეზენტაციების წარდგენას უნდა ახლდეს თქვენი საფუძვლიანი განმავითარებელი შეფასება ნაშრომებისა და დასახელებული თემის ირგვლივ. პრეზენტაციები კარგ ინსტრუმენტს მოგცემთ ასეთი შეფასებისთვის, საკითხის უფრო სიღრმისეულად აღქმისთვის. ინტერაქტიული ფორმით წარმართული ღრმა და საინტერესო განმავითარებელი შეფასება საუკეთესოდ შეაჯამებს მოსწავლეთა საპრეზენტაციო აქტივობას.

VI თავის დამატებითი ამოცანები

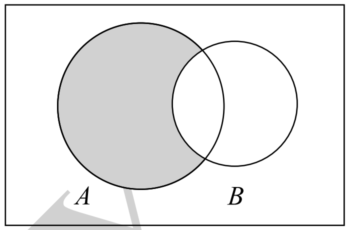
ამოცანები შეიძლება სხვადასხვა დროს და სხვადასხვა მიზნებისთვის გამოვიყენოთ. მაგალითად, თუ თვითშეფასების ტესტის მიხედვით აღმოჩნდება, რომ მოსწავლეს ხარვეზები აქვს სიმრავლეთა თეორიის ამოცანების ამოხსნაში, ვენის დიაგრამების გამოყენებაში, მაშინ მეტ ყურადღებას ამ თემასთან დაკავშირებულ ამოცანებს დავუთმობთ.

მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად

1 კლასში შეიძლება იყოს მოსწავლე,რომელიც არც შავთმიანია და არც ცისფერთვალა.

მოსწავლეების რაოდენობა, რომელიც ან ცისფერთვალაა ან შავთმიანი, სულ დიდი — 14-ია. თუ მოსწავლეების რაოდენობა, რომლებიც ცისფერთვალაა ან შავთმიანი, არის x, მაშინ $x \le 14$ და $n(A \cap B)=9+6-x=15-x$; A-შავთმიანები, B — ცისფერთვალა, $n(A)=9$, $n(B)=6$. მაშასადამე, $n(A \cap B)$ სულ მცირე, არის $15-14=1$.

ბ) ვენის დიაგრამაზე შესაბამისი ნაწილი დაშტრიხულია; აქ საძიებელი რიცხვი ასე გამოითვლება: $9-m$, სადაც m არის იმ მოსწავლეების რაოდენობა, რომლებიც შავთმიანიც არის და ცისფერთვალაც, მათი მაქსიმალური რაოდენობა არის 6; $9-6=3$.



(2) ეს ამოცანა წინა ამოცანის ანალოგიურია
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$.

ა) A წითელი ფერის მანქანების სიმრავლეა, B — ტურბოძრავიანების. თუ მანქანების რაოდენობა, რომლებიც წითელია ან ტურბოძრავიანი, არის x, ($n(A\cup B)=x$), მაშინ $n(A\cap B)=11+14-x$.

x(მაქს)=32, ე. ი. $n(A\cap B)$-ს უმცირესი მნიშვნელობაა $35-32=3$.

ბ) აქ m იყოს ტურბოძრავიანი წითელი მანქანების რაოდენობა, m(მაქს)=11.
$24-11=13$.

(3) დ) $\boldsymbol{N}\cup\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}$;
$\boldsymbol{Q}\cap\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}$ ჭეშმარიტია.

(4) დ) $D=\{x|5x^2-4x+1=0,\ x\in\boldsymbol{R}\}$ ცხადია, $\boldsymbol{D}=\varnothing$.

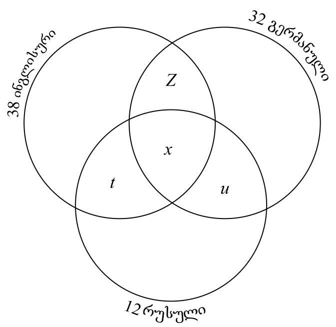
(5) $A\cup B=(-2;\ 15)$;
$A\cap B=[0;\ 10)$.
$A\backslash B=(-2;\ 0)$, $B\backslash A=[10;\ 15)$.

(6) $A=\{0;\ -3;\ 2\}$, $n(A)=3$.

(7) მაგალითად, რაციონალური რიცხვი: $\dfrac{1{,}2+1{,}3}{2}$.
ირაციონალური რიცხვი: $\sqrt{1{,}5}$, $\sqrt{1{,}6}$; რადგან $1{,}2^2=1{,}44$, $1{,}3^2=1{,}69$.

(8) A — ხელოვნებაზე, B — სპორტზე, $n(A\cap B)=12$. $n(A)=x$, $n(B)=x+4$,
$24=x+x+4-12$, საიდანაც $x=16$, $x+4=20$.

(9) ინგლ. — 38, გერმ. — 32. რუს. — 12.
$z+t+u=16$



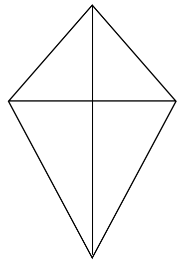
ცხადია,

$$60=38+32+12-(t+x)-(z+x)-(n+x)+x$$
$$60=82-(t+z+u)-2x$$
$$2x=82-16-60$$
$$2x=6,\ x=3.$$

(10) ა) იმისთვის, რომ $\overline{324ab}$ გაიყოს 9-ზე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $a+b$ იყოფოდეს 9-ზე.

ბ) იმისთვის, რომ $\overline{324ab}$ გაიყოს 9-ზე, აუცილებელია, მაგრამ არ არის საკმარისი, რომ $a+b$ გაიყოს 3-ზე.

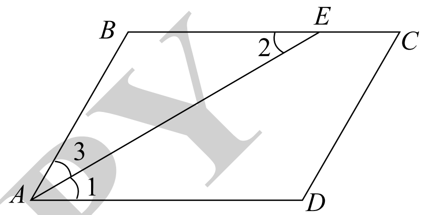
(11) ა) „თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები მართობულია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი რომბია“ — არ არის ჭეშმარიტი. სასურველია მოსწავლეებს ვთხოვოთ წარმოადგინონ რომბისგან განსხვავებული ოთხკუთხედი, რომლის დიაგონალები მართობულია.



ბ) „თუ პარალელოგრამის დიაგონალები მართობულია, მაშინ ეს პარალელოგრამი რომბია“ — ჭეშმარიტია.

(12) თუ AE ბისექტრისაა, მაშინ $\angle1=\angle3$; $BC||AD$, ამიტომ $\angle1=\angle2$; მაშასადამე, $\angle2=\angle3$, ე. ი. $AB=BE$.

თუ $AB=BE$, მაშინ $\angle3=\angle2$. რადგან $BC||AD$, $\angle2=\angle1$; ე. ი. $\angle3=\angle1$; AE ბისექტრისაა.



თუ $AB=AE\neq BE$ და B კუთხე, მაგალითად, 50^0-ია, მაშინ AE არ არის ბისექტრისა. ეს კონტრმაგალითი სახელმძღვანელოს პასუხებშია მოყვანილი. ამრიგად, შებრუნებული დებულება მცდარია.

(16) ამოცანა წესიერ პირამიდას ეხება. მოსწავლემ უნდა გაითვალისწინოს, რომ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძე კვადრატია, მითითებული კვეთაც კვადრატი იქნება და მისი ფართობი ფუძის ფართობის მეოთხედია. წესიერ პირამიდაში გვერდითი წიბოები ტოლია, სიმაღლე ფუძის ცენტრში ეშვება.

(17) კვეთაში მიიღება სამკუთხედი, რომლის გვერდები წახნაგების დიაგონალების ნახევრების ტოლია.

(18) აქ სამი მართობის შესახებ თეორემას ვიყენებთ, იმის დასადგენად, რომ კვეთაში მართკუთხედი მიიღება.

(19) პითაგორას თეორემის გამოყენებით, ამოცანა ადვილად იხსნება.

(20) ამ ამოცანაშიც სამი მართობის შესახებ თეორემას ვიყენებთ: ADB სამკუთხედის სიმაღლე დახრილია, რომლის გეგმილი ფუძის სიმაღლეა და მას ადვილად ვიპოვით.

(21) გასათვალისწინებელია წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის თვისებები. ფუძე კვადრატია, სიმაღლე ფუძის ცენტრში ეშვება, ყველა გვერდითი წიბო ტოლია:

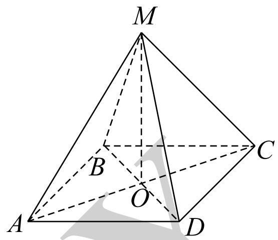
ა) $\angle MBO$; ბ) O-დან გავავლებთ DC-სადმი OF მართობს. F არის DC-ს შუა წერტილი; საძიებელი კუთხე OMF კუთხეა, რადგან DMC სიბრტყეზე OM-ის გეგმილი MF მონაკვეთზე ძევს; გ) AMB სამკუთხედში გავავლებთ ME სიმაღლეს, საძიებელი კუთხე არის $\angle MEO$; დ) AM-ის რაიმე წერტილზე AM-ის მართობულად AMB და AMD სიბრტყეებზე გავლებული სხივები ქმნიან საძიებელ ხაზოვან კუთხეს. მისი ტოლი კუთხე იქნება $\angle DKB$. ის მიიღება, როცა AMD სამკუთხედში გავავლებთ DK სიმაღლეს, BK არის AMB-ს სიმაღლე. პასუხი: $\angle BKD$.

22 ვთქვათ, ყველა წიბო არის a, მაშინ

$OC=\frac{a}{\sqrt{2}}$;

$cos\angle OCM=\frac{a}{\sqrt{2}}:a=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\angle OCM=45^0$.



23 ამ პირამიდის ყველა წიბო ტოლია. ვთქვათ, თითოეულის სიგრძე არის a; ორწახნაგა კუთხე — α. მაშინ

$cos\alpha=\frac{a}{2}:\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (გვერდითი წახნაგის სიმაღლეა $\frac{a\sqrt{3}}{2}$), $cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

24 საძიებელი მანძილია MO.

$MO=\frac{12}{sin60^0}$; $MO=\frac{24}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$ (სმ).

25 ვთქვათ, ამ პირამიდის თითოეული წიბოს სიგრძე არის a, $\angle MAO=\alpha$, მაშინ $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 4=144\sqrt{3}$; $a=12$.

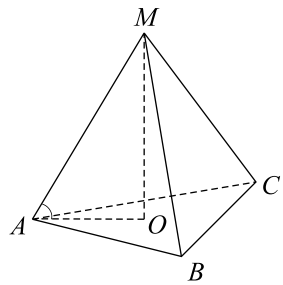
ფუძის AD სიმაღლე (მედიანა) ტოლია $\frac{a\sqrt{3}}{2}$-ის,

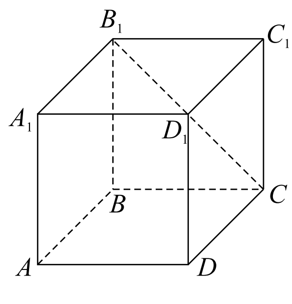
$AO=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

ა) $cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{3}}:a=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

ბ) $MO=asin\alpha=12\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=4\sqrt{6}$ (სმ);

გ) $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{144\sqrt{3}}{4}\cdot 4\sqrt{6}=144\sqrt{2}$ (სმ^3).

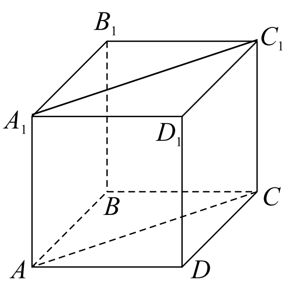




26 თუ a არის კუბის წიბო, მაშინ $a^3=0,064$; $a=0,4$ მ.

ა) კუთხე AA_1-სა და B_1C-ს შორის ტოლია AA_1-სა და B_1C-ს პარალელურ A_1D-ს შორის კუთხის. $\angle AA_1D=45^0$.

ბ) $AB=0,4$ მ.

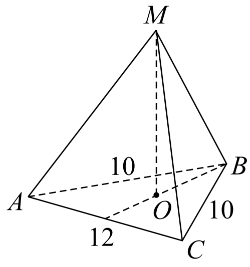


28 თუ სიმაღლეა H, ფუძის გვერდია a, მაშინ, პირობით, $H=a\sqrt{2}$, $(a\sqrt{2})^2=32$; $2a^2=32$; $a=4$.

$V=a^3\sqrt{2}=64\sqrt{2}$ (სმ^3).

$S_{სრ}=2a^2+4\cdot a^2\sqrt{2}=32+64\sqrt{2}$ (სმ^2).

(29) პირამიდის სიმაღლე ეშვება ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრში; OB შემოხაზული წრეწირის რადიუსია, მას ადვილად ვიპოვით, მაგალითად, ფორმულით:



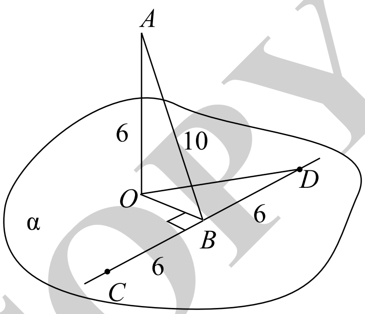
$$R=\frac{abc}{4Q}=\frac{10\cdot10\cdot12}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot12\cdot8}=\frac{25}{4}.$$

რადგან $\angle MBO=45^0$, იმავე რიცხვის ტოლია H სიმაღლე, $R=H=\frac{25}{4}$; მოცულობა კი ასე გამოითვლება: $V=\frac{1}{3}Q\cdot H=100$ (სმ^3).

(30) $AB=10$, $AO=6$, მაშინ $BO=8$.

$OD^2=6^2+8^2$

$OD=OC=10$ სმ.



შემაჯამებელი წერა №7

თემატური ბლოკი: მიმართებები სივრცეში წრფეებს შორის, სიბრტყეებს შორის, წრფესა და სიბრტყეს შორის.

საამიზნე ცნებები: გეომეტრიული ფიგურები, ზომები, სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება, რიცხვითი გამოთვლები.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს გეომეტრიული ფიგურების ამოცნობა, აღწერა, გამოსახვა, მათი განსაზღვრებებისა და თვისებების სწორად ჩამოყალიბება და დამტკიცება, ამ ობიექტთა ზომის (სიგრძე, ფართობი, მოცულობა) გამოთვლა (მათ.საშ.4); ამოცანების ადეკვატური გააზრება და ამოხსნის გზების დასახვა.

ამოცანების ნიმუშები

(1) $PABC$ სამკუთხა პირამიდის ყველა წიბო 12 სმ-ია. იპოვეთ იმ კვეთის პერიმეტრი და ფართობი, რომელიც გადის ფუძის AC გვერდზე და PB წიბოს M შუა წერტილზე.

(2) ABC სამკუთხედის გვერდებია 12 სმ, 16 სმ და 20 სმ. მასზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია OM მართობი. M წერტილი დაშორებულია სამკუთხედის სიბრტყიდან 24 სმ-ით. იპოვეთ M წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე მანძილები.

(3) *PABC* პირამიდის *PA* წიბოს *M* წერტილზე გავლებულია *ABC* წახნაგის (ფუძის) პარალელური კვეთა. იპოვეთ მისი ფართობი, თუ $PM:MA=1:2$ და $AB=21$ სმ, $BC=23$ სმ, $AC=20$ სმ.

(4) *MABC* პირამიდის ფუძე *ABC* ტოლგვერდა სამკუთხედია, 10 სმ-ის ტოლი გვერდით; გვერდითი წიბოები ტოლია და *MA* წიბო ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 30^0-იან კუთხეს. იპოვეთ ამ პირამიდის მოცულობა.

(5) *ABC* ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფუძე $AC=19{,}2$ დმ, ფართობი — 38,4 დმ^2. სამკუთხედის სიბრტყისადმი *B* წვეროდან აღმართული *BM* მართობის სიგრძე 0,9 დმ-ია. იპოვეთ მანძილი *M*-დან სამკუთხედის *AC* გვერდამდე.

პასუხები: (1) $P=12(\sqrt{3}+1)$ სმ, $S=36\sqrt{2}$ სმ^2. (2) 26 სმ. (3) $\dfrac{8\sqrt{66}}{3}$ სმ^2. (4) $\dfrac{250\sqrt{3}}{9}$ სმ^3. (5) 4,1 დმ.

მითითებები:

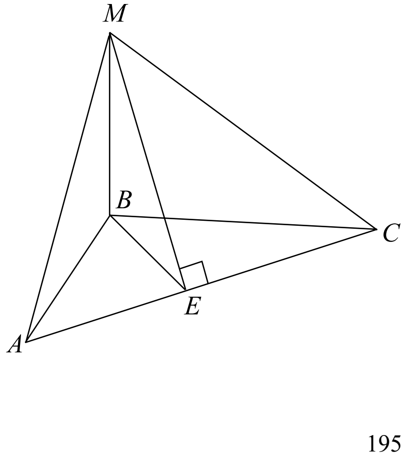
(1) კვეთაში მიღებული *AMC* სამკუთხედის გვერდებია $AC=12$ სმ, $AM=MC=6\sqrt{3}$ სმ, *AC* ფუძისადმი გავლებული სიმაღლე $\sqrt{(6\sqrt{3})^2-6^2}=6\sqrt{2}$ სმ.

(2) სამკუთხედი არის მართკუთხა, ამიტომ მასზე შემოხაზული წრეწირის *O* ცენტრი ჰიპოტენუზის შუაწერტილია, $BO=CO=OA=10$ სმ. *AMO*, *CMO* და *BMO* ტოლი მართკუთხა სამკუთხედებია, $MA=MB=MC=\sqrt{10^2+24^2}=26$ (სმ).

(3) ფუძის ფართობი შეიძლება გამოვთვალოთ ჰერონის ფორმულით, კვეთა ფუძის მსგავსი სამკუთხედია მსგავსების კოეფიციენტით $\dfrac{1}{3}$, ამიტომ კვეთის ფართობი ფუძის ფართობის $\dfrac{1}{9}$-ია.

(4) რადგან გვერდითი წიბოები ტოლია, *MO* სიმაღლე გადის ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრზე, $R=\dfrac{abc}{4S}=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$. *MAO* მართკუთხა სამკუთხედიდან ვიპოვით პირამიდის სიმაღლეს.

(5) საძიებელია *M*-დან *AC* გვერდისადმი გავლებული მართობის სიგრძე. ეს მართობი არის სამკუთხედის სიბრტყისადმი გავლებული დახრილი (სურათზე *ME*), რომლის გეგმილი *ABC* სამკუთხედის *BE* სიმაღლეა.



განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

გთავაზობთ, დავალებებიდან თითოეული შეფასდეს 2 ქულით.

(1) კვეთის აგებისთვის ნაშრომს დაეწეროს 0,5 ქულა, კვეთაში მიღებული სამკუთხედის გვერდების პოვნისთვის — კიდევ 0,5 ქულა; 1 ქულა — კვეთით მიღებული სამკუთხედის ფართობის პოვნისთვის (ჰერონის ფორმულით, ან სამკუთხედის სიმაღლის პოვნის გზით).

(2) სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის პოვნის წარუმატებელი მცდელობისთვის, ან იმის შენიშვნისთვის, რომ *CMO*, *AMO* და *BMO* ტოლი მართკუთხა სამკუთხედებია, დაიწერება 0,5 ქულა. რადიუსის პოვნისთვის — კიდევ 1 ქულა. სწორად ამოხსნილი ამოცანა შეფასდეს 2 ქულით.

(3) 1 ქულა დაეწეროს ნაშრომს, თუ გამოთვლილია ფუძის ფართობი; 0,5 ქულა დაემატოს, თუ შენიშნულია კვეთაში მიღებული და ფუძეში მდებარე სამკუთხედების მსგავსება, კიდევ 0,5 ქულა — მსგავსების კოეფიციენტის პოვნისთვის და კვეთის ფართობის გამოთვლისთვის. ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება ჯერ კვეთაში მიღებული სამკუთხედის გვერდები იპოვოს და შემდეგ — კვეთის ფართობი. შეფასება ასევე 2-ქულიანი იქნება.

(4) 0,5 დაეწერება, თუ შენიშნულია, რომ პირამიდის სიმაღლის ფუძე *ABC* სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია, 0,5 ქულა — ამ წრეწირის რადიუსის პოვნისთვის; კიდევ 0,5 ქულა — პირამიდის სიმაღლის პოვნისთვის და 0,5 ქულა მოცულობის გამოთვლისთვის.

(5) ნახაზის აგება და საძიებელი მონაკვეთის მინიშნება შეფასდეს 0,5 ქულით. კიდევ 0,5 ქულით შეფასდეს *BE* სიმაღლის პოვნა; დაემატება კიდევ 1 ქულა, თუ შენიშნულია რომ *BME* მართკუთხა სამკუთხედია და გამოთვლილია *ME* დახრილის სიგრძე.

ამ შემაჯამებელი წერის შედეგების განხილვით შეიძლება მნიშვნელოვანი დასკვნები გაკეთდეს განხილული სამიზნე ცნებების: გეომეტრიული ობიექტებისა და მათი ზომების შესახებ მოსწავლეთა ცოდნის დონის შესახებ. ეს თემა საყურადღებოა მოსწავლეთა ზოგადსაგანმანათლებლო კუთხითაც — მოსწავლის სივრცული წარმოდგენების განვითარებისა და ობიექტთა გამოსახვის მხრივ. ეს ვითარება ამაღლებს ამ განმსაზღვრელი შეფასების შემდგომ ჩასატარებელი განმავითარებელი შეფასების მნიშვნელობას. ინტერაქტიული ფორმით, მოსწავლეთა შემოქმედებითი ჩართულობით, განხილვის სხვადასხვა ფორმის გამოყენებით შეიძლება არსებითი წინსვლა აღმოჩენილი ხარვეზების გამოსწორების, გეომეტრიულ ობიექტთა უკეთ აღქმისა და გამოსახვის უნარების განვითარების მიმართულებით.

(1) ამოცანის განხილვისას მეტი ყურადღება მიაქციეთ ამოცანის პირობის მიხედვით ნახაზის შედგენის უნარის განვითარებას, კლასმა იმსჯელოს კვეთის ცნებაზე, მის ფორმაზე და მისი ფართობის დადგენის სხვადასხვა გზაზე, სამკუთხედების მსგავსებაზე, სათანადო ფორმულების გამოყენებაზე. წაახალისეთ მოსწავლეთა ინიციატივები.

(2) ამოცანის განხილვისას კლასმა გაიხსენოს სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცნება; იმსჯელოს სხვადასხვა სახის სამკუთხედის შემთხვევაში შემოხაზული წრეწირის ცენტრის მდებარეობაზე; გაიხსენოს პითაგორას თეორემა და მისი შებრუნებული თეორემა. სწორედ ამ შებრუნებული თეორემის საფუძველზე დავასკვნით, რომ სამკუთხედი მართკუთხაა და მასზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი ჰიპოტენუზის შუა წერტილს წარმოადგენს. ეს არსებითად ამარტივებს განხილვას. თუმცა, არაა გამორიცხული, რომ ზოგიერთმა მოსწავლემ შემოგვთავაზოს ამოხსნა ამ გამოკვლევის გარეშე, ფორმალურად: იპოვოს (სათანადო ფორმულით) შემოხაზული წრეწირის რადიუსი და ასე დაასრულოს ამოხსნა. კარგი იქნება, თუ ამ შემთხვევაში ხაზს გავუსვამდით, რომ ასეთი მიდგომა სრულფასოვან წარმოდგენას არ შეგვიქმნიდა რეალურ სურათზე.

(3) ამოცანის საჯარო განხილვისას მოისმინეთ მოსწავლეთა მოსაზრებები მონაკვეთის გარკვეული პროპორციით დაყოფის, ამოცანის ამოხსნის სხვადასხვა გზის, ჰერონის ფორმულის გამოყენების შესახებ. იზრუნეთ აგრეთვე, რომ მოსწავლეებმა ნახაზის შედგენის კულტურაზეც გაამახვილონ ყურადღება.

(4) ამოცანის განხილვამდე კიდევ ერთხელ მიუბრუნდით წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის, ორ სიბრტყეს შორის კუთხისა და ორწახნაგა კუთხის ცნებათა განსაზღვრებებს; მოიყვანეთ საილუსტრაციო ნახაზები; იმსჯელეთ ამ ამოცანაში პირამიდის სიმაღლის ფუძის მდებარეობის, სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის, კერძოდ, ტოლგვერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის შესახებ.

(5) ამოცანის უკეთ გააზრების მიზნით, ნახაზის შედგენისას იმსჯელეთ პირამიდის გამოსახულების ორიენტაციის შესახებ — განიხილეთ სხვადასხვა ვარიანტი. როგორ მოვძებნოთ სივრცეში წერტილიდან წრფემდე მანძილი? რა დახმარებას გიწევთ თეორემა სამი მართობის შესახებ?

ეცადეთ, რომ თქვენ მხოლოდ წარმართოთ განხილვა, რომლის ძირითადი მონაწილეები მოსწავლეები უნდა იყვნენ; ეცადეთ აგრეთვე, რომ მათ მიერ მოწოდებული მოსაზრებების, ვერსიების ირგვლივ პოლემიკასაც შეუწყოთ ხელი. ასეთი მიდგომა სასწავლო პროცესისადმი უთუოდ წაადგება მოსწავლეთა ცოდნის გაღრმავებას, სამიზნე ცნებათა არსის უკეთ გააზრებას, გამოყენებითი ასპექტების უკეთ წარმოჩენას.

გთავაზობთ რეკომენდაციას მეხუთე თავის შემაჯამებელი წერისა და განმავითარებელი შეფასების მიხედვით მოსწავლეთა აკადემიური დონეების დადგენის შესახებ (სოლო ტაქსონომიის დონეების მიხედვით).

1. პრესტრუქტურული დონე. მოსწავლეს აქვს არამკაფიო სივრცული წარმოდგენები, ვერც სამიზნე ცნებების შესახებ ახერხებს მსჯელობას. შესაბამისად, ვერ ახერხებს ნახაზის აგებას. ვერ ერთვება სათანადო საკითხების შესახებ გამართულ მსჯელობაში.

2. უნისტრუქტურული დონე. მოსწავლე იცნობს ზოგიერთი ტიპის სივრცულ ობიექტებს და შეუძლია სათანადო ნახაზის აგება, მსჯელობა მისი ელემენტების შესახებ შესაბამისი ტერმინოლოგიის გამოყენებით. თავად ვერ ახერხებს ამოცანის ბოლომდე გადაჭრას, თუმცა ერთვება ხოლმე კლასში გამართულ მსჯელობაში და ახდენს მითითებათა რეალიზებას, ადგენს ობიექტთა ზომებს.

3. მულტისტრუქტურული დონე. მოსწავლე დამოუკიდებლად განიხილავს არა-რთულ-სტანდარტულ სტერეომეტრიულ ამოცანებს, აგებს სათანადო ნახაზს, მსჯელობს მისი ამოხსნის შესახებ. ზოგჯერ სჭირდება დახმარება ამოცანებში ფიგურათა კვეთების გააზრებისას, ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის აგებისას. იგი კარგად აღწერს თავის ნაშრომს, გამოყენებულ დებულებებს, ზომათა პოვნის პროცედურებს.

4. მიმართებითი დონე. მოსწავლეს მკაფიო წარმოდგენები აქვს ყველა სამიზნე ცნებასა და მკვიდრ წარმოდგენაზე. ტექსტური ამოცანის მიხედვით აგებს ადეკვატურ ნახაზს. ამოხსნის მიმდინარეობას წარმოადგენს სტრუქტურირებულად, კარგად იყენებს თეორიას, შეუძლია ნაშრომის წარდგენა მკაფიო ფორმით, ხაზს უსვამს ზოგიერთ ანა-ლოგიას, აკეთებს მიღებული შედეგების ანალიზს, აქტიურია და საჯარო განხილვისას გამოირჩევა კონსტრუქციული შეთავაზებებით.

5. გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. მოსწავლეს შეუძლია დასმული ამო-ცანების ღრმა ანალიზი და ამის კვალობაზე საუკეთესო კუთხით ორიენტირებული ნა-ხაზის აგება, მისი შევსება აუცილებელი დამატებითი აგებებით; ის აღწერს თავის მოქ-მედებებს მკაფიოდ და დამაჯერებლად; მას შეუძლია დასმულ ამოცანათა განზოგადება და მათი გადაჭრის გზების დასახვა, ჰიპოთეზების წამოყენება; ის კრიტიკულად აანა-ლიზებს სხვათა მოსაზრებებს და პასუხობს საკუთარი დამაჯერებელი არგუმენტებით; საჯარო განხილვებში მისი წვლილი არსებითია.

VII თავი
სტატისტიკა და ალბათობა

<table>
<tr><td colspan="4">თემები: მონაცემები; შეგროვება, კლასიფიკაცია, ანალიზი; კომბინატორიკა; ხდომილობათა სივრცე, ალბათობა.

საათების სავარაუდო რაოდენობა: 24 სთ.</td></tr>
<tr><th>სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვები</th><th>კომპლექსური დავალება</th></tr>
<tr><td>მონაცემები, ანალიზი; ხლომილობა, ალბათობა. მონაცემების შეგროვება, კლასიფიკაცია და ანალიზი გვეხმარება კვლევის ჩატარებაში; რეალურ მოვლენაზე დაკვირვების შედეგად, შეიძლება შევაფასოთ ალბათობა — ეს დაგვეხმარება ალბათობის გამოთვლაში.</td><td>მონაცემების შეგროვება, ანალიზი, წარდგენა; შემაჯამებელი რიცხვითი მახასიათებლები; კომბინატორიკის ელემენტები და მათი გამოყენება ალბათობის გამოსათვლელად; ოპერაციები ხდომილობებზე.</td><td>როგორ ხდება პროცესების შედეგების პროგნოზირება ალბათობის გამოყენებით?</td><td>ალბათობის პრაქტიკული გამოყენებები.</td></tr>
<tr><td colspan="4">შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს საკვლევი თემის განსაზღვრა, კვლევის დაგეგმვა, მონაცემების შეგროვება, დამუშავება, წარმოდგენა (მათ. საშ. 6). ცდებისა და ექსპერიმენტის ჩატარებით ხდომილობის სტატისტიკური და თეორიული ალბათობის შეფასება (მათ. საშ. 7).</td></tr>
</table>

7.1. მონაცემთა შეგროვება

მონაცემთა ანალიზი და სტატისტიკა, რომელიც ალბათობასთან ერთად ცალკე მიმართულებად არის ჩამოყალიბებული, საშუალო სკოლის ყველა საფეხურის პროგრამებში შედის. მასწავლებლებს შევახსენებთ, რომ თავდაპირველად ტერმინი „სტატისტიკა“ მართვის მეცნიერებასა და ხელოვნებას აღნიშნავდა. სახელმწიფოს მართვა მოითხოვდა მოსახლეობის, მრეწველობისა და სოფლის მეურნეობის შესახებ მონაცემების შეგროვებას. მონაცემების შეგროვებას კი აზრი არ აქვს, თუ მას სარგებლობა არ მოაქვს. ამიტომ სტატისტიკის საგანი მონაცემების შეგროვების გარდა მათი დაჯგუფება და დამუშავება, დამუშავების შემდეგ კი სასარგებლო რეკომენდაციების შემუშავება ხდება. მონაცემები კი, არა მარტო ადამიანთა საზოგადოებას უნდა ეხებოდეს, არამედ ყველაფერს, რაც დაკვირვების საგანი შეიძლება იყოს.

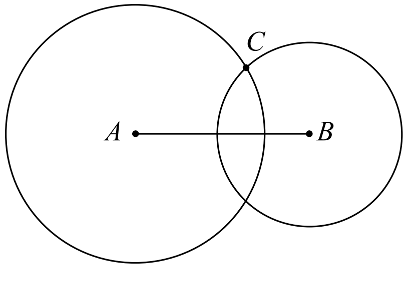
მონაცემების შეგროვების საშუალებების გაცნობას ეძღვნება VI თავის პირველი პარაგრაფი. ვეცნობით ინფორმაციის შეგროვებისას მონაცემთა მოპოვების შესაბამისი ხერხების შერჩევისა და გამოყენების მაგალითებს. ვეცნობით სტატისტიკური მონაცემების შეგროვების ხერხებს — დაკვირვებას, აღრიცხვას, ანკეტირებას, ექსპერიმენტს. განვიხილავთ ამ ხერხების გამოყენების კონკრეტულ მაგალითებს. ანალოგიური საკითხები წინა წლებშიც შეისწავლებოდა; შეგროვების ზოგიერთ ხერხს მოსწავლე უკვე იცნობს. მეცადინეობები, სასურველია, ინტერაქტიული ფორმით, მოსწავლეთა აქტიური მონაწილეობით წარიმართოს.

(1) მას შემდეგ, რაც საზღვარგარეთ მოთამაშე ქართველი ფეხბურთელები წარმატებით მონაწილეობენ ევროპის ცნობილ ჩემპიონატებში, ჩვენში ფეხბურთისადმი ინტერესი კიდევ უფრო გაიზარდა. მამაკაცებიც და ქალებიც ინტერესით ადევნებენ თვალს მათ გამოსვლებს. შეიძლება შეგროვდეს მონაცემები, მაგალითად, ჩვენი ფეხბურთელების სასტარტო შემადგენლობაში მოხვედრათა რაოდენობის, კარში ბურთების მოგერიების, ან საგოლე გადაცემებისა და გოლების რაოდენობების შესახებ. ამ მონაცემების შეგროვება შეიძლება ინტერნეტის ქართულ სპორტულ საიტებზე.

(2) შეიძლება მოვიძიოთ ინფორმაცია ნახშირბადის რადიოაქტიური იზოტოპის (C–14) შესახებ (ფიზიკური მეთოდი ბიოლოგიური ნარჩენების, საგნებისა, ან ბიოლოგიური მასალის წარმოშობის თარიღის დასადგენად).

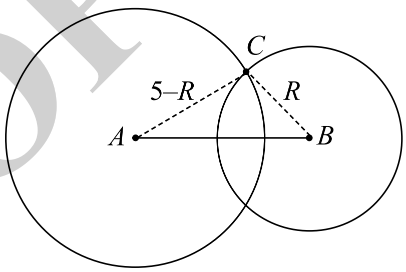
(3) მაგალითად, ქანქარის მოძრაობის განტოლების აღმოჩენამდე ტარდებოდა ცდები და გროვდებოდა შესაბამისი მონაცემები. შეიძლება სხვა მაგალითების მოყვანაც ფიზიკიდან.

(4) მონიშნეთ სიბრტყეზე ორი წერტილი, მაგალითად, A და B. შეარჩიეთ ისეთი R რიცხვი, რომ შესრულდეს პირობა: $2R+2>AB$ და გავავლოთ $R+2$ და R რადიუსიანი წრეწირები, რომელთა ცენტრები, შესაბამისად, A და B წერტილებია. ამ წრეწირების გადაკვეთის



C წერტილს აქვს თვისება: $AC–BC=2$. R-ის ცვლით, მივიღებთ სხვადასხვა წერტილს. C წერტილის ანალოგიურად, ამ წერტილებიდან A-მდე და B-მდე მანძილების სხვაობა 2-ის ტოლია. ამ წერტილების განლაგებაზე დაკვირვება მიგვიყვანს ჰიპოთეზამდე — ეს წერტილები ჰიპერბოლას ეკუთვნის (ჰოპერბოლის ფორმა მოსწავლეებისთვის ცნობილია). შესაძლოა შედეგი არასრული იყოს — მოსწავლემ შეიძლება მხოლოდ ერთი შტოს არსებობა ივარაუდოს. შესაძლოა მოსწავლეებმა დავალების შესრულებისას ისარგებლონ კომპიუტერული პროგრამებით (*Desmos, Geogebra, ...*).

5 წინა ამოცანის ანალოგიურად, ვიღებთ ორ წერტილს, მაგალითად, A-სა და B-ს, ამასთანავე, ვთქვათ, $AB<5$. შევარჩიოთ რაიმე R რიცხვი და შემოვხაზოთ ორი წრეწირი, რომელთა რადიუსებია R და $5–R$, ცენტრები — B და A.



R-ის ცვლით, მიიღება სხვადასხვა წერტილი (C-ს ანალოგიური). ასეთი ძიების დროს შეიძლება ზოგიერთმა შენიშნოს, რომ R-ის ცვლილებისას, ყოველთვის, C-დან A და B წერტილებამდე მანძილების ჯამი უცვლელია — 5-ის ტოლია. მეტი თვალსაჩინოებისთვის შეიძლება ფურცელზე დაამაგრონ გარკვეული სიგრძის ძაფის ბოლოები. ეს ძაფი გაჭიმონ ფანქრის წვერით და ამოძრაონ ფანქარი ისე, რომ ძაფი დაჭიმული დარჩეს. ფურცელზე ისინი მიიღებენ სასურველ წირს — სახელად ელიფსს.

მასწავლებლები იცნობენ ამ წირის შესწავლის კოორდინატულ მეთოდს; ეს საკითხი შეიძლება მაღალი მზაობის მოსწავლეებთან დამატებითი მსჯელობის საგანიც გახდეს. სავარაუდოდ, მოსწავლეები აქაც გამოიყენებენ კომპიუტერულ პროგრამებს.

4 და 5 ამოცანები კლასში უნდა ამოიხსნას; მოსწავლეებს უნდა შევახსენოთ წრეწირის განსაზღვრება (ჩვენი კითხვის პასუხად, მოსწავლეები იხსენებენ, რომ წრეწირი არის სიბრტყის იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც ტოლი მანძილით არის დაშორებული ამავე სიბრტყის მოცემული წერტილიდან). ორივე შემთხვევაში, ასაგები წერტილები შეიძლება იყოს ორი წრეწირის საერთო წერტილი. რადგან 4 ამოცანაში საუბარია, რომ მოცემული წერტილებიდან ერთ-ერთ წერტილამდე მანძილი 2 სმ-ით მეტია მეორე წერტილამდე მანძილზე; მაშასადამე, ეს წერტილი იმ ორი წრეწირის საერთო წერტილია, რომლებიდანაც, ერთ-ერთის რადიუსი 2-ით მეტია მეორის რადიუსზე. 5 ამოცანაში რადიუსების ჯამი უნდა იყოს 5, თუ ერთ-ერთი წრეწირის რადიუსია R, მეორის უნდა იყოს $5–R$.

ეს ამოცანები, მითითებების შემდეგ, მოსწავლეებმა შეიძლება დამოუკიდებლად ამოხსნან. ზოგიერთმა მასწავლებელმა შეიძლება გაითვალისწინოს კლასის მომზადების მაღალი დონე და იმავე ამოცანებში, კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებით, სთხოვოს მოსწავლეებს, მხოლოდ ერთი — C წერტილის კოორდინატების მიხედვით, იპოვონ შესაბამისი განტოლება და, განტოლების გამოყენებით, იმსჯელონ წირის ფორმაზე, ვარაუდები კი შეამოწმონ კომპიუტერული პროგრამების საშუალებით. ამოცანებში კი განხილულია დაკვირვებისა და ცდის ჩატარების მეთოდი, რომლის საშუალებითაც გა-

მოითქმება ვარაუდი და პირველი წარმოდგენები (20 ან 30 წერტილის მიხედვით, ან ზემოთ აღწერილი ექსპერიმენტის მიხედვით) წრის ფორმის შესახებ.

(6) უნდა შევადაროთ ძელაკების მასები — ტოლი მოცულობების შემთხვევაში, ვერცხლის ძელაკი უფრო მძიმეა.

△1 შეიძლება მაგალითად, შემდეგი კითხვების გამოყენება:

1) რამდენი წევრია თქვენს ოჯახში?
2) რამდენი ლარია ოჯახის ყოველთვიური შემოსავალი?
3) ოჯახის რამდენ წევრს აქვს მუდმივი სამუშაო?

△4 შეიძლება ასეთი კითხვარის შედგენა:

1) რამდენად ახერხებს მოსწავლეთა ჩართვას სწავლის პროცესში (0-5 ქულა)?
2) რამდენად ობიექტურია მოსწავლეთა შეფასებისას (0-5 ქულა)?
3) რამდენად ყურადღებიანია დავალებების შემოწმებისას (0-5)?
4) რამდენად ზომიერია საშინაო დავალებათა მოცულობა (0-5)?

△5 მიზანშეწონილია დაკვირვებებისა და აღრიცხვის გამოყენება.

△6 დამოკიდებულება არ არის წრფივი.

პროექტზე მუშაობა შეიძლება სხვადასხვა ფორმით ჩატარდეს. მაგალითად, შეიძლება მოსწავლეთა ჯგუფებად დაყოფა, ჯგუფებში სამუშაოს განაწილება და ნამუშევრის პრეზენტაციაში მონაწილეობა მოსწავლეებმა თავად გადაწყვიტონ. შეიძლება თემების ცალკე ინდივიდუალური დამუშავებაც. (2) ამოცანაში მითითებული დავალების შესრულება შეიძლება გამოადგეს მასწავლებელს შემაჯამებელი წერის ვარიანტების შედგენისას.

7.2 მონაცემთა კლასიფიკაცია. ორგანიზება. დაგროვილი სიხშირე და რანგი

საშინაო დავალების შემოწმებისა და მონაცემთა შეგროვების ხერხების განხილვის შემდეგ, ბუნებრივია, დაისვას კითხვები:

— რა მიზნით ვაგროვებთ მონაცემებს?

— რა ხერხები გამოვიყენოთ მიღებული მონაცემების დასამუშავებლად?

განვიხილავთ რამდენიმე ცხოვრებისეულ მაგალითს, რომელშიც მნიშვნელოვანია მონაცემების ანალიზი; ეს ანალიზი კი ამ მონაცემების თვალსაჩინოდ და აღსაქმელად მოსახერხებელი ფორმით წარმოდგენით ხერხდება. ვეცნობით მონაცემთა ერთობლიობისა და ცალკეულ მონაცემთა რამდენიმე მახასიათებელს — დაგროვილ სიხშირეს,

დაგროვილ ფარდობით სიხშირეს, რანგს. ეს ახალი ცნებები ძირითადი სამიზნე ცნების (მონაცემები) მნიშვნელოვანი ქვეცნებებია და მათი გააზრება პრაქტიკული მაგალითების განხილვით მიმდინარეობს. მონაცემების დაჯგუფება — კლასებად დაყოფა, შესაბამისი სვეტოვანი დიაგრამების — ჰისტოგრამების აგება აადვილებს შედეგების შეფასებას. მნიშვნელოვანია **დაგროვილი სიხშირის** ცნების შემოტანა; ამ ცნების განხილვაც პრაქტიკული მაგალითის განხილვით მიმდინარეობს — აღირიცხება მონაცემთა ერთობლიობაში იმ მონაცემების რაოდენობა (სიხშირე), რომლებიც მოცემულ რიცხვს (სიხშირეს ან ფარდობით სიხშირეს) არ აღემატება.

მოსწავლეები ადვილად გაიაზრებენ სიხშირეთა ცხრილიდან დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილზე გადასვლას და შესაბამის დიაგრამას. სიხშირის, ფარდობითი სიხშირისა და დაგროვილი სიხშირის ცნებების განხილვა პრაქტიკული ამოცანის გამოყენებით, აადვილებს მათი შინაარსის გააზრებას (გაითვალისწინეთ, რომ ზოგიერთი საცნობარო წყარო დაგროვილ სიხშირეებს „კუმულაციურ სიხშირეებად“ მოიხსენიებს). ცოდნის განმტკიცება ამოცანების ამოხსნის საშუალებით მიმდინარეობს.

(2) მაგალითად, თუ აქციათა რიცხვი არის 2, სიხშირეა 20; თუ არის 5, მაშინ სიხშირეა 12. აქციონერების რაოდენობა, რომელთა აქციების რაოდენობა 5-ს არ აღემატება, არის 20+12. მაშასადამე, დაგროვილი სიხშირეა 20+12=32, დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე — $\frac{32}{45}$ (სიხშირეთა ჯამია 45). ასე შევსებული ცხრილი სახელმძღვანელოს პასუხებშია წარმოდგენილი.

(4) ჯერ შევადგინოთ სიხშირეთა ცხრილი, რომელიც შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

მონაცემი	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)	[65; 70]
სიხშირე	2	5	12	11	8	2

შემდეგ ადვილად აიგება შესაბამისი ჰისტოგრამა.

△2 მონაცემები უნდა დავალაგოთ ზრდის მიხედვით: 6,5; 6,5; 6,5; 7; 7; 7; 7; 7; 7,5; 8; 8; 8; 8; 8; 8,5;

7,5-ის რანგია 9, ის მე-9 მონაცემია.

ქართველი ფეხბურთელის შეფასება საუკეთესოა, მისი რანგია 15. 7 ქულა მიიღო ხუთმა სპორტსმენმა, უნდა გამოვთვალოთ მათი რიგითი ნომრების („რანგების“) საშუალო: $\frac{4+5+6+7+8}{5}=6$.

7.3 მონაცემთა წარმოდგენის ხერხები

პარაგრაფი ეძღვნება მონაცემთა წარმოდგენის სხვადასხვა ხერხის შესწავლას. მონაცემთა წარმოდგენას სიით, სიხშირეთა ცხრილებით, ჰისტოგრამით, მოსწავლეები უკვე იცნობენ. აღნიშნული წინარე ცოდნის საფუძველზე, წარმოდგენილია სიხშირეთა განაწილების წერტილოვანი დიაგრამა, ფოთლებიანი ღეროს მსგავსი დიაგრამა, პოლიგონი და ოგივა. ყველა ეს ცნება ცხოვრებისეული მაგალითების განხილვის დახმარებით წარმოიდგინება. ოჯახებში ბავშვების რაოდენობების მიხედვით განაწილების სიხშირეთა ცხრილის წერტილოვანი დიაგრამით გამოსახვა ახალი დიაგრამების პირველი მაგალითია. მას ბუნებრივად მოსდევს პოლიგონის აგება და შესაბამისი დიაგრამის წარმოდგენა. მაგალითის განხილვა მოსწავლეთა აქტიური ჩართულობით უნდა მიმდინარეობდეს. მოსწავლეები თავად გამოთქვამენ მოსაზრებას, რომ ჰისტოგრამებთან ერთად პოლიგონებიც ხელსაყრელია ერთობლიობების შედარებისას. პოლიგონი თვალსაჩინოდ წარმოგვიდგენს ოჯახების რაოდენობათა დინამიკას ბავშვთა რაოდენობის ცვლილებისას.

დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამას მოსწავლეები იცნობენ. ამ დიაგრამის გამოყენებით, შემოდის ოგივა — დაგროვილ სიხშირეთა განაწილების წირი. სიხშირეთა განაწილების გრაფიკული გამოსახვის კარგი საშუალებაა ე. წ. ფოთლებიანი ღეროს მსგავსი დიაგრამა. ამ დიაგრამის აგება თვალსაჩინო მაგალითის განხილვით მიმდინარეობს. მოსწავლეებს მოეთხოვებათ რიცხვების ჩაწერის წესის გამოყენება, თანრიგების მითითება და გამოყოფა.

ამოცანებშიც პრაქტიკული მაგალითებია განხილული. მათი ამოხსნით მოსწავლეები განიმტკიცებენ ცოდნას მონაცემთა წარმოდგენის ახალი ხერხების შესახებ.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

2 მდგრადი განვითარების პრინციპების შესაბამისად, მნიშვნელოვანია მწვანე ნარგავების მნიშვნელობაზე საუბარი; ყველა სახლს უნდა ჰქონდეს ნარგავების გარკვეული რაოდენობა. ამოცანის ა) პირობის თანახმად, ნარგავების რაოდენობები აღრიცხულია 31 სახლთან: 1+0+3+6+8+7+5+0+1=31;

ბ) 9 ნარგავია 7 სახლთან;

გ) ნარგავების რაოდენობას ასე დავთვლით:

$1\cdot4+3\cdot6+6\cdot7+8\cdot8+7\cdot9+5\cdot10+1\cdot12=253$.

4 ნარგავი მაინც (ნარგავების რაოდენობა 3-ზე მეტია) არის 31 სახლის წინ, 6-ზე ნაკლები ნარგავი — 1 სახლის წინ. სიხშირეთა ცხრილის შედგენა არ არის ძნელი.

3 ა) დიაგრამის მიხედვით 8 სტუდენტმა იმეცადინა მხოლოდ 4 დღის განმავლობაში.

ბ) ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად, ვიპოვით ჯამს:
11+9+3+1=24.

გ) აღრიცხულია 52 სტუდენტის მეცადინეობების დღეები.

(6) დიაგრამის მიხედვით, წარმოდგენილია 12 მონაცემი; უმცირესია 43; უდიდესი — 89. 65-ზე მეტი არის ხუთი მონაცემი: 71, 78, 82, 86 და 89.

3 სიხშირეთა ცხრილი ასე ჩაიწერება:

ხელფასი	კომპანიათა რაოდენობა
250	1
260	7
270	4
280	3
290	2
300	3
310	3
320	2

ყველაზე დიდი სიხშირით წარმოდგენილია 260-ლარიანი ხელფასი.

4 ა) აქ, მაგალითად, 6|0 ნიშნავს: 6,0-ს, 7|5 — 7,5-ს.

ღერო	ფოთლები
5	5
6	0 0 5 5
7	0 0 5 5 5
8	0

ბ) 7 ან 7-ზე მეტი ქულა მიიღო 6-მა მოთამაშემ.

გ) შეიძლება გამოვიყენოთ არითმეტიკული საშუალო:
$(5,5+6\cdot2+6,5\cdot2+7\cdot2+7,5\cdot3+8):11=75:11\approx6,8$.

5 პირველი ინტერვალის შუა წერტილს ასე ვიპოვით $\frac{3,45+3,55}{2}=3,5$; ანალოგიურად, შევძლებთ სხვა შუა წერტილების პოვნას. მოსწავლეები იცნობენ დაგროვილი სიხშირეების პოვნის წესს. ცხრილი და დიაგრამები წარმოდგენილია სახელმძღვანელოს პასუხებში.

7.4 შემაჯამებელი რიცხვითი მახასიათებლები

წინარე ცოდნის გააქტიურება მაგალითების განხილვით მიმდინარეობს. მოსწავლეები იხსენებენ რიცხვით მონაცემთა მახასიათებლებს — საშუალოს, მოდას, დიაპაზონს. ისინი ახასიათებენ მონაცემთა განლაგებასა და გაფანტულობას, რაც აადვილებს მონაცემთა ორი ერთობლიობის შედარებას.

წინარე ცოდნიდან გადავდივართ ახალი ცოდნის აგებაზე — შემოგვაქვს მონაცემთა საშუალოდან გადახრის საზომი სიდიდე — სტანდარტული გადახრა. ეს ცნებაც, მნიშვნელოვანი ქვეცნება (ძირითადი სამიზნე ცნებაა „მონაცემები“), პრაქტიკული მაგალითის განხილვით შემოდის; ეს აადვილებს მისი შინაარსის გააზრებას. ამ სიდიდის გამოთვლისას ყველა მონაცემს ვიყენებთ; მას საშუალოდან საშუალო კვადრატული გადახრაც ეწოდება. წარმოდგენილია მისი გამოთვლის ალგორითმი; ამ ალგორითმის გათვალისწინებით ვპოულობთ მონაცემთა ორი სხვადასხვა ერთობლიობის სტანდარტულ გადახრებს, რომელი მონაცემები უფრო „მჭიდროდაა“ განლაგებული საშუალოს მიმართ? რომელი მონაცემები უფრო მეტად (ნაკლებად) არის გადახრილი საშუალოდან? სტანდარტული გადახრა ზომავს „გაფანტულობას“ საშუალოს მიმართ.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

4 ამ ამოცანაში მოითხოვება სტანდარტული გადახრის პოვნაც.

მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ შესაბამისი ცხრილის შედგენა, არითმეტიკული საშუალოს (აღვნიშნავთ m-ით) და სტანდარტული გადახრის გამოთვლა;

$$m=\frac{25}{10}=2,5.$$

საშუალო კვადრატული გადახრა ასე გამოითვლება:

$$\sqrt{\frac{(1-2,5)^2+(3-2,5)^2+(-4-2,5)^2+(2-2,5)^2\cdot 2+(9-2,5)^2+(0-2,5)^2+(4-2,5)^2+(-2-2,5)^2+(10-2,5)^2}{10}}=$$

$$=\sqrt{\frac{172,25}{10}}\approx 4,15.$$

7 დიაგრამის მიხედვით, მოდა არის 35, ის ორჯერ დასახელდა.

ზრდის მიხედვით დალაგების შემდეგ, ალმოვაჩენთ, რომ თერთმეტ მონაცემში მეექვსეა 35 — ეს რიცხვი მედიანაა; საშუალო, მიახლოებით, 32,8-ია, დიაპაზონი არის: 48–14=34.

5 ყველაზე ხშირად, 26-ჯერ, გვხვდება 2, ეს რიცხვი მოდაა.

სულ 100 მონაცემია. ზრდის მიხედვით დალაგებისას, 50-ე იქნება 3, 51-ე — 3. ამიტომ მედიანა არის 3.

6 ა) საშუალო — $\frac{227}{5}=45,4$;

სტანდარტული გადახრა — $\sqrt{\frac{11,4^2+0,6^2+5,4^2+11,6^2+4,6^2}{5}}=\sqrt{\frac{315,2}{5}}=\sqrt{63,04}\approx 7,9.$

მეორე ერთობლიობის საშუალოა 75,4; სტანდარტული გადახრა, მიახლოებით, 62,7-ია. ერთი რიცხვის ცვლილებამ უფრო მეტად სტანდარტულ გადახრაზე იმოქმედა (მედიანა უცვლელი დარჩა).

7.5 კომბინატორიკა. კომბინატორიკის ორი ძირითადი წესი

ამ პარაგრაფში წარმოდგენილი მასალით მოსწავლეები კიდევ ერთხელ გაიაზრებენ თეორიულ-სიმრავლური კონცეფციის გამოყენების მნიშვნელობას, სამიზნე ცნების — „სიმრავლის“ — მნიშვნელობას მათემატიკური მსჯელობების ჩატარებისა და დასკვნების გამოტანისას. შესაბამისი შეფასების ინდიკატორები საშუალო სკოლის მათემატიკის სტანდარტში ასეა ჩამოყალიბებული: „სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებით, ლოგიკური მსჯელობითა და დასაბუთებით, ამოცანის ფორმულირება ან/და პრობლემის გადაწყვეტა (მათ. საშ. 8). მათემატიკის მნიშვნელოვანი ნაწილის განხილვა, რომლის სახელია კომბინატორიკა, სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებით მიმდინარეობს. კომბინატორიკის პირველი წესიც სასრული არაგადამკვეთი სიმრავლეების გაერთიანებაში ელემენტების რაოდენობის განსაზღვრას უკავშირდება. წინარე ცოდნის გააქტიურებაც სიმრავლეთა თეორიის ელემენტების შესახებ ცოდნის გამეორებაა. სიმრავლეებზე მოქმედებები, ვენის დიაგრამების გამოყენება ამ მოქმედებათა აღსაწერად, სასრულ სიმრავლეთა გაერთიანებაში ელემენტების რაოდენობის ფორმულის გახსენება წინ უძღვის კომბინატორიკის ძირითადი წესების ჩამოყალიბებას.

კომბინატორიკა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სიმრავლეთა თეორიის ნაწილი — ყოველი კომბინატორული ამოცანა შეიძლება გადმოვცეთ სიმრავლეებისა და მათი ასახვების ენაზე.

ჯამის წესის შესწავლა შეიძლება დავიწყოთ მარტივი მაგალითების განხილვით. მაგალითად, ვთქვათ, A სიმრავლე შეიცავს m ელემენტს, B სიმრავლე — n ელემენტს. რამდენი ელემენტია $A\cup B$ სიმრავლეში? ამ ამოცანას, იმ შემთხვევაში, როცა $A\cap B=\varnothing$, ადვილად ვუპასუხებთ. ამ შემთხვევაში, $A\cup B$ სიმრავლეში $m+n$ ელემენტია. ვთხოვოთ მოსწავლეებს, მოიფიქრონ მაგალითები.

თუ $A\cap B=\varnothing$, A შეიცავს m ელემენტს, B შეიცავს n ელემენტს, მაშინ $A\cup B$ შეიცავს $m+n$ ელემენტს — ამ დებულებას კომბინატორიკაში ეწოდება ჯამის წესი. სასურველია, ეს წესი სხვა სიტყვებითაც ჩამოვაყალიბოთ: თუ α შეიძლება შეირჩეს m წესით, β — n წესით, ამასთანავე, α-ს შერჩევის ყოველი წესი განსხვავებულია β-ს ყოველი შერჩევისგან, მაშინ „ან α-ს ან β-ს“ შერჩევა შეიძლება $(m+n)$ წესით.

აქვე შეიძლება მოსწავლეებს მარტივი მაგალითი შევთავაზოთ: თეფშზე 7 ვაშლი და 6 მსხალია. ამ თეფშიდან ერთი ცალი ნაყოფის შერჩევის 7+6=13 შესაძლო ვარიანტი არსებობს.

აქვე უფრო რთულ შემთხვევასაც განვიხილავთ — $A\cap B$ არ არის ცარიელი სიმრავლე; ამ შემთხვევასაც იცნობენ მოსწავლეები. აქაც შეიძლება მარტივი მაგალითის მოყვანა — ვთქვათ გვაქვს 1-დან 10-მდე კენტი რიცხვების A სიმრავლე, $A=\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$ და მარტივი რიცხვების B სიმრავლე, $B=\{2;\ 3;\ 5;\ 7\}$. მაშინ $A\cup B=\{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$ შედგება არა 5+4=9 ელემენტისგან, არამედ 6 ელემენტისგან. მივმართავთ მოსწავლეებს:

— ახსენით ეს ფაქტი.

— ეს აიხსნება იმით, რომ 3, 5 და 7 ეკუთვნის A სიმრავლესაც და B სიმრავლესაც, ხოლო $A\cup B$ სიმრავლეში ისინი თითოჯერაა წარმოდგენილი. ამიტომ (5+4) ჯამს უნდა გამოვაკლოთ საერთო ელემენტთა რაოდენობა — 3.

ნებისმიერი A და B სიმრავლეებისთვის

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B).$$

ნებისმიერი სასრული A-სთვის, $n(A)$ აღნიშნავს A-ს ელემენტების რაოდენობას. შეიძლება ეს რიცხვი ასეც აღვნიშნოთ: $|A|$, მაშინ

$$|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|.$$

იმ სკოლებში, რომლებშიც მათემატიკისთვის მეტი დროა გამოყოფილი და მათემატიკა გაძლიერებული პროგრამით ისწავლება, შეიძლება ვისაუბროთ იმ შემთხვევაზე, როცა სიმრავლეების რაოდენობა 2-ზე მეტია; ამ შემთხვევაში,

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n)=n(A_1)+n(A_2)+ \ldots +n(A_n)$$

ფორმულა ჭეშმარიტია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა დასახელებული სიმრავლეებიდან ყოველი ორი სიმრავლე არათანამკვეთია. ფორმულა მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით ადვილად მტკიცდება.

საზოგადოდ, გვაქვს:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)=n(A_1)+n(A_2)+\ldots+n(A_n)-n(A_1 \cap A_2)-n(A_1 \cap A_3)-\ldots-n(A_{n-1} \cap A_n)+$$
$$+n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)+n(A_1 \cap A_2 \cap A_4)+\ldots+n(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)+\ldots+(-1)^{n-1}n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n).$$

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

4 შესვლის შესაძლებლობა 4-ია, გამოსვლისაც 4. ამიტომ შესვლა-გამოსვლის შერჩევის 16 შესაძლებლობა არსებობს.

5 შევნიშნოთ, რომ ერთ-ერთ ლანგარზე დადებული ვაშლების რაოდენობით სავსებით განისაზღვრება მეორე ლანგარზე მოთავსებული ვაშლების რაოდენობა. განვიხილოთ ერთ ლანგარზე ვაშლების მოთავსების შესაძლებლობები.

არც ერთი ვაშლი — 1 შესაძლებლობა;

1 ვაშლი — 3 შესაძლებლობა;

2 ვაშლი — 3;

3 ვაშლი — 1.

სულ — 8 შესაძლებლობა.

შეიძლება დავითვალოთ ასეც: ყოველ ვაშლს აქვს ლანგრებზე განთავსების 2 შესაძლებლობა, 3 ვაშლის შემთხვევაში, გამრავლების წესით, მივიღებთ, რომ სულ $2 \cdot 2 \cdot 2=8$ შესაძლებლობა არსებობს.

6 მნიშვნელობა ექნება აკრეფილი ციფრების თანამიმდევრობასაც (განვიხილავთ დალაგებულ წყვილებს), მაგალითად, 12 და 21 წყვილი სხვადასხვაა, პირველი ციფრისთვის გვაქვს 10 შესაძლებლობა, მეორესთვისაც — 10, სულ — $10 \cdot 10=100$. ამრიგად, კოდური ზარების რაოდენობა საკმარისია.

7 $3 \cdot 5 \cdot 2=30$.

(8) ეს ამოცანა ასეც ჩამოყალიბდება: 9 ვაგონიდან შევარჩიოთ 4 (ვითვალისწინებთ თანამიმდევრობასაც); შესაძლო რაოდენობაა: 9·8·7·6=3024, მართლაც, I მგზავრს აქვს ვაგონის არჩევის 9 შესაძლებლობა, მას შემდეგ მეორეს რჩება არჩევის 8 შესაძლებლობა, მესამეს — 7, მეოთხეს კი მხოლოდ 6 შესაძლებლობა. აქ გამრავლების წესს ვიყენებთ.

(9) ვირჩევთ 1 ცენტრს 2-დან — 2 შესაძლებლობაა. ვირჩევთ 2 მცველს 4-დან. ერთი მცველის შერჩევათა რიცხვი არის 4; მეორე მცველის შერჩევათა რიცხვი იქნება 3, სულ 4·3 წყვილი გვექნება, მაგრამ მათი ნახევარი იქნება სხვადასხვა წყვილი. ე. ი. $\frac{4\cdot 3}{2}=6$. მართლაც, მცველთა (a, b) და (b, a) წყვილები ხომ ერთ წყვილს წარმოადგენს. აქ, ფაქტობრივად, გვაქვს C_4^2 წყვილი. ამ რიცხვსაც გაიმეორებენ მოსწავლეები.

შეიძლება ასეც ვიმსჯელოთ: 4 მცველიდან თითოეულის მეწყვილე შეიძლება იყოს 3 მცველი, დანარჩენი 3-დან თითოეულის მეწყვილე — 2 მცველი, დანარჩენი 2-დან თითოეულის — 1. სულ: 3+2+1=6.

5 თავდამსხმელიდან 2-ის შერჩევათა რაოდენობაა $\frac{5\cdot 4}{2}=10$.

ამრიგად, გუნდის — ხუთეულის შერჩევის 2·6·10=120 შესაძლებლობა არსებობს.

(10) თითოეულ ნერგს ვირჩევთ, ან არ ვირჩევთ, თითოეული ნერგისთვის გვაქვს ორი შესაძლებლობა, სულ 2^8 შესაძლებლობა. მაგრამ აქ ჩათვლილია ის შემთხვევაც, როცა არცერთი ნერგი არ არის შერჩეული. ამრიგად, პასუხია $2^8-1=255$.

(11) ორი დროშის შერჩევისთვის გვაქვს 12 შესაძლებლობა (4·3=12), სამისთვის — 24 (4·3·2=24), ოთხისთვის — 24 (4·3·2·1=24); ახლა ვიყენებთ შეკრების წესს: 12+24+24=60.

(12)-(13) ამოცანებში ვიყენებთ გამრავლების წესს. 9-ელემენტიანი სიმრავლის ყოველი ქვესიმრავლე შეიძლება ჩაიწეროს, მაგალითად, ასე:

$$(0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 0).$$

ანუ, ამ ქვესიმრავლეში არ შედის პირველი ელემენტი, შედის მეორე ელემენტი, არ შედის მე-3 და მე-4 ელემენტები, და ა. შ. იმდენი ქვესიმრავლე გვექნება, რამდენი ასეთი ჩანაწერიც შეიძლება შედგეს. აქ, გამრავლების წესის თანახმად, ასეთი ჩანაწერების რაოდენობაა 2^9 (ყოველ ადგილზე ციფრის ჩაწერის 2 შესაძლებლობაა, სულ ადგილების რაოდენობაა 9).

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ: n-ელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაოდენობა არის 2^n.

(14) x-ის შერჩევათა რაოდენობაა 5, y-ის — 3; სულ გვაქვს 5·3=15 შესაძლებლობა.

7 ვიყენებთ გამრავლების წესს:
5·6·3·2=180.

8 შეიძლება შედგეს $6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6=6^5=7776$ ხუთნიშნა რიცხვი — გამოვიყენოთ გამრავლების წესი. განსხვავებული ციფრებით ჩაწერილი იქნება: 6·5·4·3·2=720 რიცხვი.

შედგენილ რიცხვებში იქნება 6·6·6·6·4=5184 ლუწი რიცხვი; ჩამოთვლილი ციფრებიდან „ლუწი ციფრების“ რაოდენობა არის 4 — ბოლო ციფრი შეიძლება იყოს 2, 4, 6 ან 8.

9 ექვსი მისამართიდან ვირჩევთ სამს (ვითვალისწინებთ თანამიმდევრობასაც). შესაძლებლობების რაოდენობაა 6·5·4=120.

10 28 მერხიდან უნდა შეირჩევს 8 მერხი. შესაძლებლობათა რაოდენობა არის: 28·27·26·25·24·23·22·21.

11 დაწყობის შესაძლებლობათა რაოდენობა არის: 8·7·6·5·4·3·2·1=40320.

მათგან, ერთ შემთხვევაში წიგნები ნომრების ზრდის მიხედვით დალაგდება, მეორე შემთხვევაში — კლების მიხედვით. დარჩა 40318 შემთხვევა.

12 ა) ხუთნიშნა რიცხვებში პირველი ციფრი აირჩევა 9 ციფრიდან, ყოველი შემდეგი ციფრი 10 ციფრიდან. სულ გვექნება 9·10·10·10·10=90000 ხუთნიშნა რიცხვი.

ბ) რაოდენობას ასე გამოვითვლით: 1·10·10·10·1=1000.

გ) აქ პირველი ციფრის შერჩევათა რაოდენობა არის 8, ყოველი შემდეგი ციფრის — 9.

დ) მიმდევრობით აღებულ ყოველ ხუთ ნატურალურ რიცხვს შორის ერთი იყოფა 5-ზე. ამიტომ უნდა ვიპოვოთ საერთო რაოდენობის მეხუთედი. შეიძლება ასეც ვიმსჯელოთ (გამრავლების წესით): ბოლო ციფრი უნდა იყოს 0 ან 5 (2 შესაძლებლობა) სულ — 9·10·10·10·2=18 000.

13 8 მორბენლიდან ვირჩევთ (თანამიმდევრობის გათვალისწინებით) წყვილებს; შერჩევათა რიცხვი, გამრავლების წესის თანახმად, არის: 8·7=56.

7.6 კომბინატორიკის ძირითადი ფორმულები

წინარე ცოდნის გააქტიურება კომბინატორიკის ძირითადი წესების ჩამოყალიბებითა და შესაბამისი ამოცანების ამოხსნით მიმდინარეობს. ვემზადებით სამიზნე ცნების — ხდომილობის ალბათობის გამოთვლასთან დაკავშირებული ამოცანების ამოსახსნელად. ალბათობის ის ნაწილი, რომელიც სკოლაში განიხილება კომბინატორულ ალბათობას და სასრული რაოდენობის შედეგების დათვლას უკავშირდება. ეს პროცესი კი კომბინატორიკის ფორმულების გამოყენებით მიმდინარეობს. მოსწავლემ, კომბინატორიკის წესებისა და ფორმულების გამოყენებით, უნდა შეძლოს ხდომილობის ალბათობის შეფასება და ამ გზით პროცესების შედეგების პროგნოზირება (მას. საშ. 7.); სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებით, დალაგებული სიმრავლის ინტუიციურ გააზრებაზე დაყრდნობით, შეძლოს გადანაცვლებისა და წყობის ცნებების გააზრება. სიმრავლეთა თეორიის ენაზეა ახსნილი ჯუფთების ცნებაც. მაგალითების განხილვის საფუძველზე, მოსწავლეები გაიაზრებენ გადანაცვლებათა რიცხვის, წყობათა რიცხვისა და ჯუფთებათა რიცხვის ფორმულების მიღებას.

კონკრეტულ მაგალითზეა ახსნილი წყობებსა და ჯუფთებებს შორის, მათი რაოდენობის გამოსათვლელ ფორმულებს შორის კავშირი.

ამოცანების ამოხსნით, მოსწავლეები განიმტკიცებენ ცოდნას კომბინატორიკის ძირითადი ფორმულების შესახებ; გამოიმუშავებენ ამ ფორმულების გამოყენების ჩვევებს. ფორმულების ცოდნა მათ დაეხმარება „ტესტებში" პასუხების დადგენა-შერჩევაში.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

კლასში განვიხილავთ ფაქტორიალების შემცველი გამოსახულებების გამარტივების მაგალითებს — მოსწავლეებმა უნდა გაიაზრონ, რომ $n!$ არის 1-დან n-მდე (ჩათვლით) ნატურალური რიცხვების ნამრავლი და, მაგალითად, $\frac{n!}{(n-2)!}$ წილადში მრიცხველი და მნიშვნელი შეიძლება შევკვეცოთ ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლზე 1-დან $(n-2)$-ის ჩათვლით. მრიცხველში დაგვრჩება ორი რიცხვის ნამრავლი: $(n-1)n$. (დავალება **8** ა)).

10 ეს ამოცანა სხვადასხვანაირად შეიძლება ამოიხსნას; თუ ნებისმიერ ამოზნექილ n-კუთხედს განვიხილავთ, ყოველი წვერო უკავშირდება სამი წვეროს გარდა ყველა დანარჩენს, ამასთანავე, ყოველი დიაგონალი 2-ჯერ იქნება დათვლილი; ამის გათვალისწინებით გვექნება $\frac{n(n-3)}{2}$.

თუ წვეროების ყველა წყვილს განვიხილავთ (ანუ წვეროების შემაერთებელ მონაკვეთებს), მაშინ გვერდებიც იქნება გათვალისწინებული. მაშასადამე, დიაგონალების რიცხვი იქნება:

$$C_n^2-n=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}.$$

11 აქ გადანაცვლებათა რიცხვის ფორმულა უნდა გამოვიყენოთ.

12 ამ ამოცანის ამოხსნისას, გავითვალისწინოთ, რომ 5! გადანაცვლებაში იმ გადანაცვლებების რაოდენობა, რომლებშიც A არის B-ს წინ, ტოლია იმ გადანაცვლებების რაოდენობის, რომლებშიც B არის A-ს წინ. მაშასადამე, გამომსვლელთა სიების შესაძლო რაოდენობა იქნება: $\frac{5!}{2}=60$.

13 აქ შეიძლება წარმოვიდგინოთ, რომ „AB" ერთი გამომსვლელია. ამრიგად, გვექნება სიის შედგენის 4! შესაძლებლობა.

14 აქ, ცხადია, წყობათა რიცხვის ფორმულა უნდა გამოვიყენოთ: $A_5^3=3\cdot4\cdot5=60$.

15 მწვანე ფერს აქვს 3 შესაძლებლობა (ჰორიზონტალური ზოლებიდან), დანარჩენი 2 ფერი შეირჩევა 4 სხვადასხვა ფერიდან; გამრავლების წესის თანახმად, სულ გვექნება შერჩევათა რაოდენობა: $3\cdot A_4^2$.

16 შვიდნიშნა ნომრების საერთო რაოდენობაა: $9\cdot10^6=9\ 000\ 000$. განსხვავებული ციფრებით ჩაწერილი ნომრების რაოდენობაა: $9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4$.

საძიებელი შეფარდებაა: $\frac{9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{9\,000\,000}=0{,}06048$.

(17) აქ, ცხადია, ჯუფთებათა რიცხვის ფორმულა უნდა გამოვიყენოთ. 12-დან 10 კითხვის შერჩევათა რაოდენობა ასე გამოითვლება:

$$C_{12}^{10}=C_{12}^{2}=\frac{12\cdot11}{2}=66.$$

აქ გამოთვლების გასამარტივებლად გამოვიყენეთ ჯუფთებათა რიცხვის ფორმულა: $C_n^m=C_n^{n-m}$.

(18) 2310-ს აქვს მხოლოდ ხუთი მარტივი გამყოფი 2310=2·3·5·7·11; ამ ხუთიდან ორი უნდა შეირჩეს; შერჩევათა რაოდენობა არის: $C_5^2=\frac{5\cdot4}{1\cdot2}=10$.

(19) 3570-ს აქვს 5 მარტივი გამყოფი: 3570=2·3·5·7·17; $C_5^3=C_5^2=\frac{5\cdot4}{2}=10$.

(20) იმის გათვალისწინებით, რომ ყოველ სამ წერტილზე ერთადერთი სიბრტყე გადის, ვირჩევთ სამეულებს. სამეულების შერჩევათა რიცხვი არის: $C_{10}^3=\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}=120$. შესაძლებელია 120 სიბრტყის გავლება.

(21) აქ შეიძლება გამოვიყენოთ 5-ელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რიცხვის ფორმულა: $2^5=32$; ერთ ჯიბეში მონეტების შერჩევა განსაზღვრავს მეორე ჯიბეშიც მონეტების რაოდენობას; ერთ ჯიბეში შეიძლება შეირჩეს 5-დან 1 მონეტა, ან 2, ან 3, ან 4, ან 5, ან არცერთი არ შეირჩეს. შეიძლება ასეც ვიმსჯელოთ: ყოველი მონეტისთვის ჯიბის შერჩევის 2 შესაძლებლობა არსებობს. ამრიგად, გამრავლების წესის გამოყენებით, მიიღება საძიებელი რაოდენობა — $2^5=32$.

(22) სიტყვა „ანაგრამა“ 8 ასოსგან შედგება; განსხვავებულია 5 ასო. $P_8=8!$ იქნება 8 განსხვავებული ასოსგან შედგენილი სხვადასხვა წყობის რაოდენობა; მაგრამ „ა“ ასოთა გადაადგილება წყობებს არ ცვლის. ამრიგად, განსხვავებულ წყობათა რაოდენობა $P_4=4!$-ჯერ ნაკლები იქნება 8-ასოიან გადანაცვლებათა საერთო რაოდენობაზე. მიიღება: $\frac{8!}{4!}$.

(23) სიტყვა „თავთავი“ შვიდი ასოსგან შედგება, განსხვავებულია — ოთხი; სამი ასო მეორდება. 7-ასოიანი განსხვავებული წყობების რაოდენობა იქნება: $\frac{7!}{2!\cdot2!\cdot2!}=630$.

(24) ვმსჯელობთ, წინა ამოცანების ანალოგიურად.

(25) აქ უნდა გამოვიყენოთ გამრავლების წესი და სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რიცხვის ფორმულა: 8-დან 3 სტუდენტის შერჩევათა რიცხვი არის C_8^3; 5-დან 2 მაგისტრანტის შერჩევათა რიცხვი არის C_5^2. თვითმმართველობის კომიტეტის შერჩევათა რიცხვი იქნება:

$$C_8^3\cdot C_5^2=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{5\cdot4}{1\cdot2}=8\cdot7\cdot5\cdot2=560.$$

10 გათამაშდება $\frac{n(n-1)}{2}$ პარტია. თუ $\frac{n(n-1)}{2}=210$, მაშინ $n(n-1)=420$. n-ს ზეპირადაც კი ვიპოვით: $n=21$.

11 აქ გადანაცვლებათა რიცხვის ფორმულა უნდა გამოვიყენოთ: $3!=6$.

12-**13** ამ ამოცანებშიც, ცხადია, გადანაცვლებათა რიცხვის ფორმულა უნდა გამოვიყენოთ.

14 უნდა შეირჩეს 3-ელემენტიანი დალაგებული ქვესიმრავლეები 9-ელემენტიანი სიმრავლიდან: $A_9^3=\frac{9!}{6!}=7\cdot8\cdot9=504$.

15 ამ ამოცანაშიც დალაგებული ქვესიმრავლეები უნდა შეირჩეს 26-ელემენტიანი სიმრავლიდან. სამკუთხედის შემთხვევაში შერჩევათა რიცხვი იქნება: A_{26}^3.

16 უნდა შეირჩეს 9-დან 4-ელემენტიანი დალაგებული ქვესიმრავლეები. მათი რაოდენობა არის: $A_9^4=\frac{9!}{5!}=3024$.

17 აქ 20-ელემენტიანი სიმრავლიდან 4-ელემენტიანი ქვესიმრავლეები უნდა შეირჩეს; მათი რაოდენობა არის: $C_{20}^4=4845$.

18 და **19** ამოცანები **17**-ის ანალოგიურად იხსნება.

20 ამ ამოცანის ამოხსნისას ვიყენებთ ჯუფთებათა რიცხვის ფორმულას. საკმარისია 16 მოსწავლიდან ერთ ჯგუფში შეირჩეს 5 მოსწავლე. მიიღება C_{16}^5.

21 თაიგულში უნდა შედიოდეს 2, 3, 4 ან 5 ყვავილი. ე. ი. უნდა შეიკრიბოს: C_6^2, C_6^3, C_6^4 და C_6^5. ამ რიცხვების ჯამი შეიძლება ასეც გამოვთვალოთ: $2^6-C_6^0-C_6^1=64-1-6=57$.

22 და **23** ამოცანების ანალოგიური ამოცანები კლასში ამოიხსნა. სიტყვა „რეესტრი“ შედგება 7 ასოსგან; მათგან შედგენილი განსხვავებული 7-ასოიანი წყობების რაოდენობაა: $\frac{7!}{2!\cdot2!}=1260$ (რადგან „რ“ და „ე“ ასოები ორ-ორჯერ გვხვდება).

7.7 ხდომილობათა სივრცე. ხდომილობის ალბათობა

მე-6 თავის სამიზნე ცნების („ხდომილობის ალბათობა“) შესწავლის წინაპირობაა სიმრავლის, ქვესიმრავლის, ექსპერიმენტისა და კომბინატორიკის ფორმულების ცოდნა. საშინაო დავალების შემოწმება კომბინატორიკის ფორმულების გამოყენებების შესახებ ცოდნის განმტკიცებას ემსახურება. ყველა ზემოჩამოთვლილი ქვეცნებისა და კომბინატორიკის ფორმულების გამოყენებების გამეორების შემდეგ, გადავდივართ ხდომილობათა სივრცის განხილვაზე. ვიყენებთ სიმრავლეთა თეორიის ელემენტებს; ვცდილობთ, მოსწავლეებმა კარგად გაიაზრონ ხდომილობათა სივრცის აგების თავისებურებები. მთავარია, რა გვაინტერესებს. ამის მიხედვით აიგება სხვადასხვა სივრცე, რომლის ელემენტები ელემენტარული ხდომილობებია; მათგან გამოვყოფთ სიმრავლეს, რომელიც მეტ ინფორმაციას გვაძლევს ექსპერიმენტის შესახებ; წარმოდგენილია ხდომილობათა სივრცის აგების მაგალითები; გამოვყოფთ იმ შემთხვევას, როცა ელემენტარული ხდომილობები ტოლშესაძლებელი შედეგებია; თითოეულს შევუსაბამებთ რიცხვს, ალბათობას, რომელიც $\frac{1}{n}$-ის ტოლია (n არის ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობა). ყოველი A ხდომილობა კი ხდომილობათა სივრცის ქვესიმრავლეა. სიმრავლის ენაზე საუბარი აადვილებს სამიზნე ცნების გააზრებას. თუ ეს ქვესიმრავლე შეიცავს m ელემენტარულ ხდომილობას, მაშინ მისი ალბათობა $\frac{m}{n}$ რიცხვით გამოისახება; „ტოლშესაძლებლობა“ ერთ-ერთი, მნიშვნელოვანი ქვეცნებაა და მისი გააზრება ინტუიციურად ხდება; დიდი ხნის განმავლობაში, ალბათობის თეორიის ჩამოყალიბების შემდეგ, ხდომილობის ალბათობა ასე იყო გაცნობიერებული. საშუალო სკოლაში, ცხადია, ფორმალური განსაზღვრებების შემოღება (აქსიომური მეთოდით) და ალბათობის ზუსტი განსაზღვრება შეუძლებელია. მაგალითებით აღწერილია ალბათობის გამოთვლის შემთხვევები, როცა m და n რიცხვების დასათვლელად ვიყენებთ კომბინატორიკის ფორმულებს. ამ მაგალთების დაწვრილებითი განხილვა დაეხმარება მოსწავლეებს ალბათობის გამოთვლაზე ამოცანების ამოხსნაში. „ტესტები“, ძირითადად, ხდომილობათა სივრცის გააზრებასა და კომბინატორიკის ფორმულების სწორ გამოყენებას უკავშირდება.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

7-9 ამოცანები ხდომილობათა სივრცისა და ელემენტარული ხდომილობების ტოლშესაძლებლობის გარკვევას ემსახურება.

7 ვთქვათ, გვაინტერესებს რამდენი გერბი და რამდენი საფასური გამოჩნდება მონეტებზე. მაშინ ხდომილობათა სივრცეა:

$\{(3; 0), (2; 1), (1; 2), (0; 3)\}$ — ეს ხდომილობები არ არის ტოლშესაძლებელი.

თუ გვაინტერესებს მონეტები ერთი მხრით გამოჩნდება, თუ სხვადასხვა, მაშინ ხდომილობათა სივრცეა: $\{0; 1\}$, აქ 0 განსხვავებულ ზედაპირებს ნიშნავს, 1 — ერთნაირს. არც ეს ხდომილობებია ტოლშესაძლებელი.

სავარაუდოდ, მოსწავლეები, პირველ რიგში დაასახელებენ ხდომილობათა სივრცეს ზედაპირზე მოსული სიმბოლოებით: {სსს, სსგ, სგს, გსს, სგგ, გსგ, გგს, გგგ}.

8 ა) თუ მატჩის შედეგი გვაინტერესებს, გვექნება სივრცე: {მოიგო პირველმა, მოიგო მეორემ, ფრე, თამაში არ შედგა}.

ბ) თუ, მაგალითად, გვაინტერესებს 5 აგდებისას, რამდენჯერ „მოვიდა“ გერბი, მაშინ გვექნება სივრცე: {0; 1; 2; 3; 4; 5}.

გ) თუ გვაინტერესებს სროლის შედეგი, გვექნება სივრცე {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}; 0 — ავაცილეთ სამიზნეს, 1 — პირველ რგოლში მოვახვედრეთ, 2 — მეორე რგოლში მოვახვედრეთ და ა. შ.

9 ცხადია, ელემენტარული ხდომილობები ტოლშესაძლებელი არ არის.
$P(A_2)=P(A_4)=0{,}2$; A_2 და A_4 ტოლშესაძლებელი ხდომილობებია.
მეტად ალბათურია A_3, ნაკლებად ალბათური — A_1.

10 30 წიგნიდან 3-ის შერჩევათა რიცხვი არის C_{30}^3. ხდომილობა — შერჩეული 3 წიგნი არის წაკითხული წიგნებიდან აღებული — შედგება C_{10}^3 რაოდენობის ელემენტარული ხდომილობისგან. მაშასადამე, საძიებელი ალბათობა არის: $\frac{C_{10}^3}{C_{30}^3}$.

11 სასტარტო ხუთეულის შერჩევათა რაოდენობა არის C_{12}^5. სამი ლეგიონერის შერჩევათა რიცხვი — C_7^3. ორი მოთამაშის არალეგიონერებიდან შერჩევის C_5^2 შესაძლებლობა არსებობს, ხოლო მითითებული სახის ხუთეულის შერჩევის — $C_7^3 \cdot C_5^2$ შესაძლებლობაა.
ერთ-ერთი ასეთი ხუთეულის შერჩევის ალბათობაა: $\frac{C_7^3 \cdot C_5^2}{C_{12}^5}$.

12 60 საკითხიდან 2-ის შერჩევის C_{60}^2 შესაძლებლობა არსებობს; 45-დან 2-ის შერჩევისა — C_{45}^2.

ა) $P=\frac{C_{45}^2}{C_{60}^2}=\frac{33}{59}$.

ბ) დარჩენილი (შეუსწავლელი) 15 საკითხიდან 2-ის შერჩევის შესაძლებლობათა რიცხვი არის C_{15}^2. შესაბამისი ალბათობა:

$$P=\frac{C_{15}^2}{C_{60}^2}=\frac{7}{118}.$$

გ) P (სამივე საკითხი იცის)$=\frac{C_n^3}{C_m^3}$,

P (არც ერთი საკითხი არ იცის) $=\begin{cases} \frac{C_{m-n}^3}{C_m^3}, \text{ თუ } m-n\geq 3 \\ 0, \text{ თუ } m-n<3. \end{cases}$

13 კლუბს იტალიური ან ინგლისური ფეხბურთის 80 გულშემატკვარი ჰყავს; აქ ვიყენებთ ფორმულას:

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B).$$

ორივეს გულშემატკივართა რიცხვი არის: 50+50–80=20.

ბ) 3 — ინგლისურს; 2 — იტალიურს, ან არცერთს ამ ორიდან: $P=\frac{C_{50}^3 \cdot C_{50}^2}{C_{100}^5}$;

გ) 4 იტალიურს, 1 — ინგლისურს ან არცერთს ამ ორიდან: $P=\frac{C_{50}^{4}\cdot C_{50}^{1}}{C_{100}^{5}}$;

დ) 3 ორივეს, 2 — მხოლოდ ერთ-ერთს ან არცერთს ამ ორიდან: $P=\frac{C_{20}^{3}\cdot C_{80}^{2}}{C_{100}^{5}}$.

(14) ყველა შესაძლო შერჩევათა რიცხვი, ცხადია, იქნება 20^{10} (10 მგზავრიდან ყოველი ირჩევს 20-დან რომელიმეს); ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვი კი იქნება

$$A_{20}^{10}=20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11.$$

(15) m რიცხვის ჯერადების რაოდენობა 1-დან n-მდე რიცხვებში არის $\left[\frac{n}{m}\right]$ (ანალოგიური ამოცანა ამოხსნილია, $\left[\frac{n}{m}\right]$ არის $\frac{n}{m}$-ის მთელი ნაწილი). ამიტომ საძიებელი ალბათობა ასე გამოითვლება: $P=\frac{1}{n}\left[\frac{n}{m}\right]$.

11 ა) ორი კამათლის გაგორებისას შესაძლო შედეგების რაოდენობა არის 36. ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობებია: (1; 3); (2; 2); (3; 1);

მაშასადამე, $P=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

ბ) აქ ყველა ელემენტარული ხდომილობა, გარდა სამისა, ხელშემწყობი ხდომილობაა. მაშასადამე, $P=\frac{33}{36}=\frac{11}{12}$.

გ) ეს ხდომილობა შეუძლებელია, ალბათობა 0-ის ტოლია.

დ) ლუკა იგებს შემდეგ შემთხვევებში: (1; 1); (1; 2); (2; 1); (2; 2); (1; 3); (3; 1); (5; 5); (4; 6); (6; 4); (6; 5); (5; 6); (6; 6) ლუკას მოგების „შანსი“ არის: $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

გიორგის მოგების 2-ჯერ მეტი შანსი აქვს — პირობები სამართლიანი არ არის.

პირობები სამართალიანი იქნება, მაგალითად, შემდეგ შემთხვევაში: ლუკა იგებს, თუ ჯამია 2, 3, 4, 7, 10, 11 ან 12, გიორგი — 5, 6, 8, 9.

12 ხელშემწყობია ერთადერთი გადანაცვლება 4! რაოდენობის გადანაცვლებებიდან: $P=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$.

13 სიმრავლეში 3-ის ჯერადების რაოდენობა 6-ია. საძიებელი ალბათობა არის: $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$. უფრო რთული ამოცანა კლასში იყო ამოხსნილი. 3-ის ჯერადების რაოდენობა 1-დან 20-მდე რიცხვებში არის: $\left[\frac{20}{3}\right]=6$.

7.8 მოქმედებები ხდომილობებზე. ხდომილობათა ჯამის ალბათობა

წინარე ცოდნის გააქტიურება სიმრავლეთა თეორიასა და ხდომილობათა სივრცის აგებას უკავშირდება.

ხდომილობათა ჯამი, ფაქტობრივად, შესაბამის სიმრავლეთა გაერთიანებაა; ხდომილობა ხომ ხდომილობათა სივრცის ქვესიმრავლეა; შესაბამისად, A და B ხდომილობების ჯამი და ნამრავლი შეიძლება $A \cup B$ და $A \cap B$ სახითაც ჩავწეროთ. მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ ეს აღნიშვნებიც. მაგალითების განხილვით ისინი კარგად გაიაზრებენ ხდომილობათა ჯამისა და ნამრავლის ცნებებს: ხდომილობათა ჯამის ალბათობის ფორმულა იმ შემთხვევაშია მიღებული, როცა ხდომილობები **არათავსებადია**, თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. ამ შემთხვევაში, $P(A+B)=P(A)+P(B)$, ისევე როგორც არათანამკვეთ სიმრავლეთა გაერთიანების ელემენტების რაოდენობის გამოსახვა ამ სიმრავლეების ელემენტების რაოდენობებით. ჩვენ გავითვალისწინეთ XI კლასის გადატვირთულობა და საკითხების ნაწილი XII კლასში გადავიტანეთ (მაგალითად, გეომეტრიული ალბათობა და ჯამის ალბათობის ზოგადი შემთხვევა).

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

7 კარტი ერთდროულად არ შეიძლება იყოს რვიანიც და ექვსიანიც; შესაბამისად, ვიყენებთ ჯამის ალბათობის ფორმულას: $P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{52}+\frac{4}{52}=\frac{2}{13}$ (შეიძლება ასეც ვიმსჯელოთ: კარტის დასტაში 4 რვიანი და 4 ექვსიანია, შესაბამისად, ხელშემწყობია 8 ხდომილობა 52-დან — საძიებელი ალბათობაა $\frac{8}{52}=\frac{2}{13}$).

9 აქ სამი ხელშემწყობი ხდომილობა გვაქვს: A_1 — მოგება 20 ლარია, A_2 — მოგება 100 ლარია, A_3 — მოგება 500 ლარია.

მაშასადამე, $P(A)=\frac{50}{1000}+\frac{10}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{61}{1000}$; რადგან A_1, A_2 და A_3 ხდომილობები წყვილ-წყვილად არათავსებადი ხდომილობებია, სიმრავლეთა თეორიის ენაზე — $A_1 \cap A_2=\varnothing$, $A_1 \cap A_3=\varnothing$, $A_2 \cap A_3=\varnothing$ და ამიტომ

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=n(A_1)+n(A_2)+n(A_3).$$

ზოგიერთი მოსწავლე ასეც ამოხსნის: ხელშემწყობია 61 ხდომილობა 1000-დან. შესაბამისი ალბათობაა $\frac{61}{1000}$.

10 12-იდან ორი დეტალის შერჩევათა რაოდენობაა C_{12}^2 ($C_{12}^2=\frac{12\cdot 11}{2}=66$). ამ წყვილებიდან ყველა წყვილში, გარდა ერთისა, არის წუნდებული. ის ერთადერთი წყვილი შედგება 2 არაწუნდებული (ვარგისი) დეტალისგან. მაშასადამე, $P=\frac{C_{12}^2-1}{C_{12}^2}=\frac{65}{66}$.

11 აქ ჯამის ალბათობის ფორმულის გამოყენება შეიძლება: $P(A)=0,122$.

(12) მოგება შეიძლება ფულის, ან ნივთის — არათავსებადი ხდომილობებია. რაიმეს მოგების ალბათობაა: $\frac{200}{10\,000}=\frac{1}{50}$.

(13) იმ ტურისტების მაქსიმალური რაოდენობა, რომლებიც არ არიან „ახალბედა“, არის 8 (რადგან 13–5=8). ყოველ 9 ტურისტს შორის ერთი მაინც ახალბედაა — $P=1$.

(14) არსებობს ერთადერთი „არასასურველი“ სამეული. სამეულების რაოდენობა არის $C_{20}^{3}=1140$. მაშასადამე, $P=1-\frac{1}{1140}=\frac{1139}{1140}$.

(8) ვთქვათ, A არის ხდომილობა: შემთხვევით შერჩეული ნაწარმი ან წუნდებულია (2%), ან უმაღლესი ხარისხისაა (98·0,2=19,6), მაშინ

$$P(A)=\frac{2}{100}+\frac{19{,}6}{100}=\frac{21{,}6}{100}=0{,}216.$$

(10) $\overline{A}=A_1+A_2+A_3$;

$P(\overline{A})=0{,}15+0{,}23+0{,}17=0{,}55$;

$P(A)=0{,}45$.

(11) შერჩეული ექვსი სურათიდან ერთი მაინც პორტრეტია — აუცილებელი ხდომილობაა; $P=1$.

(12) $\overline{A}$ — შერჩეული რიცხვის ყოველი ორი ციფრი განსხვავებულია.

განსხვავებულციფრებიანი სამნიშნა რიცხვების რაოდენობა, გამრავლების წესის თანახმად, არის 9·9·8=648, სამნიშნა რიცხვების რაოდენობაა 9·10·10=900; ცხადია, $P(\overline{A})=\frac{648}{900}=0{,}72$; $P(A)=1-P(\overline{A})=0{,}28$.

(13) ქართულის — 120; P(შერჩეული ქართულისაა) = $\frac{120}{400}$.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

ამოცანები დაკავშირებულია სამიზნე ცნებებთან „მონაცემები“, „ხდომილობის ალბათობა“ და ემსახურება ამ ცნებების გააზრებას; მოსწავლემ უნდა შეძლოს მონაცემების შეგროვების, ანალიზისა და წარმოდგენის შესახებ ამოცანების ამოხსნა; ცდების (ექსპერიმენტების) განხილვის საფუძველზე ალბათობის გამოთვლა, შეფასება და ამ გზით პროცესების შედეგების პროგნოზირება.

თვითშეფასების „ტესტის“ გამოყენებით, მოსწავლე აფასებს საკუთარ ცოდნას ყველა იმ საკითხისა და ქვეცნების შესახებ, რომლებიც სამიზნე ცნებებს უკავშირდება.

მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად:

(5) ქართულში 28 თანხმოვანი ასოა; 28-იდან დალაგებული ხუთეულების („სიტყვე-ბის“) შედგენათა რიცხვი არის A_{28}^{5}.

(6) აქ გასათვალისწინებელია თანამიმდევრობა; ამასთანავე, ვაგონების რაოდენობა შეიძლება იყოს: 0, 1, 2, 3, 4, 5 ან 6. აქ შეკრების წესის თანახმად, „მატარებლების“ შე-საძლო რაოდენობა იქნება

$$A_6^0+A_6^1+A_6^2+A_6^3+A_6^4+A_6^5+A_6^6.$$

(7) $1785=3\cdot5\cdot7\cdot17$.

1785-ის ყოველი გამყოფი 3, 5, 7 და 17 რიცხვებიდან თითოეულს ან შეიცავს, ან არ შეიცავს. ამრიგად, გამყოფების რაოდენობა იქნება. $2\cdot2\cdot2\cdot2=16$.

(8) პირველ ას ნატურალურ რიცხვს შორის 9 ერთნიშნა რიცხვია, 1 — სამნიშნა.
$P=\frac{10}{100}=0{,}1$.

(9) საწინააღმდეგო ხდომილობაა: ყველა ციფრი ლუწია; მისი ალბათობაა:
$P(\overline{A})=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}$; $P(A)=1-\frac{C_5^2}{C_{10}^2}$.

(10) წინა ამოცანის ანალოგიურად განვიხილავთ: „მოსული რიცხვებიდან ერთი მაინც ლუწია“: P(ერთი მაინც ლუწია) = $1-P$(ორივე კენტია) = $1-\frac{3\cdot3}{36}=\frac{3}{4}$.

შეაფასეთ თქვენი შედეგი

(1) ამოცანაში სიხშირეთა ცხრილის არსის ცოდნით ან აღწერით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას; ა) დავალებაში მითითებული ჰისტოგრამის აგებით — კიდევ 1 ქულას, პოლი-გონის აგებით — კიდევ 0,5 ქულას; ბ) დავალების შესრულებით — კიდევ 1 ქულას. ამო-ცანა 3-ქულიანია.

(2) ამოცანაში ა) და ბ) დავალებების შესრულებით დაიმსახურებთ 0,5-0,5 ქულას, გ) და დ) დავალების შესრულებით — კიდევ თითო ქულას, ამოცანა 3-ქულიანია.

(3) ამოცანაში სტანდარტული გადახრის პოვნით დაიმსახურებთ 1 ქულას, სხვა დავალებებიდან თითოეულის გადაჭრით — კიდევ 0,5 ქულას. ამოცანა 3-ქულიანია.

(4) ამოცანის ამოხსნის ძიებისას მითითებული რომელიმე ერთი მახასიათებლის მქონე ერთობლიობების პოვნით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას, ორი მახასიათებლის მქონე ერთობლიობების პოვნით — 1 ქულას, სამივე მახასიათებლის მქონე ერთი ერთობლიობის პოვნით კი — 2 ქულას. ამოცანა 2-ქულიანია.

(5) ამოცანაში წყობათა რიცხვის დათვლით დაიმსახურებთ 1,5 ქულას.

6 ამოცანის შინაარსის სწორი გააზრების დემონსტრირებით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას; ამოხსნის ცდები შეიძლება შეფასდეს 0,5 ან 1 ქულით; ამოცანის სრულფასოვანი ამოხსნა კი — 3 ქულით. ამოცანა 3-ქულიანია.

7 ამოცანაში მოცემული რიცხვის მარტივ მამრავლებად დაშლით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას; გამყოფთა არასრული სიმრავლის მოძიებით და მათი რაოდენობის დაფიქსირებით — კიდევ 0,5 ქულას; ამოცანის სრულფასოვანი ამოხსნით კი — 1,5 ქულას. ამოცანა 1,5-ქულიანია.

8 ამოცანაში პირველ 100 ნატურალურ რიცხვს შორის ერთნიშნა და სამნიშნას რიცხვების დადგენით დაიმსახურებთ 0,5 ქულას; საძიებელი ალბათობის დადგენით — კიდევ 1 ქულას. ამოცანა 1,5-ქულიანია.

9 ამოცანაში მითითებული რიცხვთა წყვილების აღწერა შეფასდება 1,5 ქულით, ალბათობის დადგენა — კიდევ 1 ქულით. ამოცანა 2,5-ქულიანია.

10 ამოცანაში მითითებული წყვილების რაიმე გზით აღწერა შეფასდება 1 ქულით, ალბათობის დადგენა — კიდევ 1 ქულით. ამოცანა 2-ქულიანია.

რამდენი ქულა მიიღეთ?

21-23 ქულა — დავალება შესრულებულია ძალიან კარგად (შეფასება მაღალია);
17-20 ქულა — დავალება შესრულებულია კარგად (შეფასება საშუალოზე მაღალია);
12-16 ქულა — დავალება შესრულებულია ნაწილობრივ (შეფასება საშუალოა);
12-ზე ნაკლები ქულის შემთხვევაში გჭირდებათ უფრო გულმოდგინე მუშაობა (შეფასება დაბალია).

კომპლექსური დავალება მოიაზრება თემის ფარგლებში განსახილველი საკითხების დასამუშავებლად და ახალი ცოდნის ასაგებად. მე-6 თავში წარმოდგენილი მასალის შესწავლას. მოსწავლემ უნდა შეძლოს დასმულ ამოცანაში ხდომილობის ალბათობის საპოვნელი ფორმულის მიღება, ალბათობის გამოთვლა და ამ გზით პროცესების შედეგების პროგნოზირება.

მოსწავლემ უნდა შეძლოს კომბინატორიკის წესებისა (ჯამის, ნამრავლის წესები) და კომბინატორიკის ფორმულების გამოყენება; ჯამის ალბათობის ფორმულის გამოყენება. პირველი მოსწავლისთვის ხელშემწყობი შემთხვევების რიცხვი არის 10, ყველა შემთხვევის რაოდენობა — 30; მაშასადამე, ალბათობა იმისა, რომ მარიამი სასურველ ბილეთს აიღებს, არის $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$. მეორე მოსწავლის შემთხვევაში, შემოვიღოთ აღნიშვნები:

A ხდომილობა — მარიამმა აიღო სასურველი ბილეთი და კოტემაც აიღო სასურველი ბილეთი. A ხდომილობის ალბათობა ასე შეიძლება გამოვთვალოთ: $P(A)=\frac{A_{10}^{2}}{A_{30}^{2}}=\frac{10\cdot 9}{30\cdot 29}$.

B ხდომილობა — მარიამმა ვერ აიღო სასურველი ბილეთი და კოტემ აიღო სასურველი ბილეთი. ასეთი შესაძლებლობების რაოდენობაა $20\cdot 10$ ($A_{30}{}^{2}$-დან). ამრიგად,

$$P(B)=\frac{20\cdot 10}{A_{30}^{2}}=\frac{20\cdot 10}{30\cdot 29}.$$

პირობის თანახმად, საჭიროა ვიპოვოთ $A+B$ ხდომილობის (ანუ $A \cup B$ ხდომილობის) ალბათობა; A და B არათავსებადი ხდომილობებია; ჯამის ალბათობის ფორმულის გათვალისწინებით, გვაქვს:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{10\cdot 9}{30\cdot 29}+\frac{20\cdot 10}{30\cdot 29}=\frac{10(9+20)}{30\cdot 29}=\frac{1}{3};$$

მაშასადამე, მოსწავლეებმა არასწორი პროგნოზი გააკეთეს — არა აქვს მნიშვნელობა, პირველად რომელი მოსწავლე აიღებს ბილეთს, სასურველი ბილეთის აღების ალბათობები ტოლია.

პრეზენტაციისას, მოსწავლემ კარგად უნდა ახსნას კომბინატორიკის გამრავლების წესი, ალბათობისა და ხდომილობათა ჯამის ალბათობის ფორმულები. მოიყვანოს საილუსტრაციო მაგალითები და გააკეთოს საჭირო კომენტარები.

VII თავის დამატებითი ამოცანები

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

1-9 ამოცანების ამოხსნების გააზრება შეიძლება შესაბამისი ცნებების განსაზღვრებებისა და პასუხებში წარმოდგენილი დიაგრამების მიხედვით.

10 აქ უნდა გამოვიყენოთ გამრავლების წესი: პირველი ციფრი შეიძლება იყოს 1, 3, 5, 7 ან 9; ანალოგიურად, მეორე, მესამე და მეოთხე ციფრები. სულ — $5\cdot5\cdot5\cdot5=5^4=625$.

11 პირველი ციფრის შერჩევათა რაოდენობა არის 9, მეორის — 10, მესამის — 10; მეოთხე და მეხუთე ციფრები უნდა დაემთხვეს, შესაბამისად, მეორე და პირველ ციფრებს — პირველი და მეორე ციფრის ყოველ წყვილს მეოთხე და მეხუთე ციფრების თითო წყვილი შეესაბამება. ამრიგად, ასეთი ხუთნიშნა რიცხვების რაოდენობაა $9\cdot10\cdot10\cdot1\cdot1=900$.

14 საჭესთან დაჯდომის 2 შესაძლებლობა არსებობს, თითოეულ შემთხვევაში დანარჩენი 5 შეიძლება სხვადასხვანაირად განლაგდეს; მათი განლაგებათა რაოდენობაა 5!, სულ — $2\cdot5!$.

15 ორ ნაწილად გაყოფის C_{36}^{18} შემთხვევა გვაქვს — ორ ნაწილად გაყოფა იგივეა, რაც 36-დან 18-ის ამორჩევა; 2 ათიანი შეირჩევა 4-დან, დანარჩენი 16 შეირჩევა 32-დან. ალბათობა არის: $\dfrac{C_4^2\cdot C_{32}^{16}}{C_{36}^{18}}$.

16 ყველა შემთხვევათა რაოდენობა ოთხივე დავალებაში არის $36\cdot35$ (A_{36}^2 — დალაგების გათვალისწინებით).

ა) დავალებაში გვაწყობს 4-დან 2 კარტი — $A_4^2=4\cdot3$, $P=\dfrac{4\cdot3}{36\cdot35}$;

ბ) დავალებაში გვაწყობს 2 კარტი 9-იდან — $A_9^2=9\cdot 8$, $P=\frac{9\cdot 8}{36\cdot 35}$; პირველი არატუზი (ტუზისგან განსხვავებული) იქნება ერთ-ერთი 32-დან (36-ში), მეორე — ერთ-ერთი 31-იდან (35-ში). ალბათობა არის: $\frac{32}{36}\cdot\frac{31}{35}$.

გ) 2 კარტი არატუზი შეირჩევა 32-იდან, $P=\frac{32\cdot 31}{36\cdot 35}$; ანუ დ) არის გ)-ს საწინააღმდეგო ხდომილობა, ამიტომ $P=1-\frac{32\cdot 31}{36\cdot 35}$.

ამ ამოცანის ამოხსნისას შეიძლება ჯუფთებათა რიცხვის ფორმულითაც ვისარგებლოთ. მივიღებთ: ა) $P=\frac{C_4^2}{C_{36}^2}=\frac{4\cdot 3}{36\cdot 35}$; ბ) $P=\frac{C_9^2}{C_{36}^2}$; გ) $P=\frac{C_{32}^2}{C_{36}^2}$.

(17) ა) 100-დან ნებისმიერი 5-ის შერჩევათა რიცხვი არის C_{100}^5; 100-დან არაწუნდებულის შერჩევათა რიცხვი — $C_{96}{}^5$; $P=\frac{C_{96}^5}{C_{100}^5}$;

ბ) ეს ხდომილობა, ცხადია, შეუძლებელი ხდომილობაა, $P=0$;

გ) წუნდებულებს შორის 2-ის შერჩევათა რაოდენობა არის $C_4{}^2$; არაწუნდებულებს შორის უნდა შეირჩეს დანარჩენი 3, ამის შესაძლებლობათა რაოდენობაა C_{96}^3; ალბათობა: $P=\frac{C_4^2\cdot C_{96}^3}{C_{100}^5}$.

(19) ორი მოსწავლე — ლიზი და ბარბარე წარმოვიდგინოთ „ერთ მოსწავლედ"; გვექნება 7! რაოდენობის დალაგება; მაგრამ ლიზის და ბარბარეს გადანაცვლებით მიღებულ დალაგებებსაც თუ გავითვალისწინებთ, სულ გვექნება $2\cdot 7!$ განლაგება: ალბათობა $=\frac{2\cdot 7!}{8!}=\frac{1}{4}$.

(20) 1-დან 100-მდე რიცხვებიდან, ყოველი 3-ის არაჯერადი რიცხვის კვადრატის 3-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი არის 1 (ეს თვისება ნებისმიერ 3-ის არაჯერად რიცხვსაც აქვს).

3-ის ჯერადების რაოდენობა (ორნიშნა რიცხვებში) არის 30, დანარჩენი 60 რიცხვი არის 3-ის არაჯერადი; მაშასადამე, ალბათობა არის: $\frac{60}{90}=\frac{2}{3}$.

(21) და **(22)** მოსწავლე ადვილად შეამოწმებს, რომ მითითებული ხდომილობები აუცილებელი ხდომილობებია.

შემაჯამებელი წერა №8

თემატური ბლოკი: სტატისტიკური მოდელების გამოყენება, მონაცემთა დამუშავება; ხდომილობა და მისი ალბათობა, კომბინატორიკა და მისი გამოყენება ალბათობაში.

საამიზნე ცნებები: მონაცემები, მონაცემთა ანალიზი, ხდომილობის ალბათობა

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს მონაცემების დამუშავება და წარმოდგენა სხვადასხვა ხერხით. მონაცემთა ერთობლიობის რიცხვითი მახასიათებლების დადგენა და ანალიზი (მათ. საშ. 6); კომბინატორიკის ფორმულების გამოყენება ხდომილობის ალბათობის გამოთვლისას (მათ. საშ. 7).

ამოცანების ნიმუშები:

(1) მოცემულია ერთ-ერთი ორგანიზაციის თანამშრომლების ხელფასების სიხშირეთა ცხრილი:

ხელფასი	450	720	1060	2210
თანამშრომლების რაოდენობა	4	6	8	2

ა) იპოვეთ ამ მონაცემთა ერთობლიობის მოდა, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი, მონაცემთა საშუალო;

ბ) იპოვეთ ამ მონაცემთა ერთობლიობის საშუალო კვადრატული გადახრა (სტანდარტული გადახრა);

გ) იპოვეთ ამ მონაცემების ფარდობითი სიხშირეები, გამოსახეთ პროცენტებში და ააგეთ ფართობით სიხშირეთა სვეტოვანი დიაგრამა.

(2) მაქსიმალური 20 ქულით შეფასებულ ტესტში მოსწავლეთა შედეგები (ინტერვალებად დაჯგუფებული) წარმოდგენილია სიხშირეთა ცხრილით:

ინტერვალი	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20]
სიხშირე	5	0	7	19	9

შეადგინეთ დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილი და ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამა.

(3) მოცემულია საწარმოს დირექტორობის 10 კანდიდატის ტესტირების შედეგები, გამოსახული ქულებით:

ქულა	3	8	12	14	15
სიხშირე	1	3	1	4	1

იპოვეთ იმ კანდიდატის რანგი, რომელმაც მიიღო

ა) 12 ქულა, ბ) 14 ქულა.

4 სკოლის ისტორიის შესახებ მონაცემების შესაგროვებლად მასწავლებელი კლასის 24 მოსწავლეს შორის შემთხვევით ირჩევს 5 მოსწავლეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლეთა ამ ხუთეულში მოხვდება ამ 24 მოსწავლეს შორის ყველაზე წარჩინებული.

5 წითლად შეღებილი ხის კუბი დახერხეს ერთნაირი ზომის 125 პატარა კუბად. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ ერთ პატარა კუბს ან შეღებილი ექნება სამი წახნაგი, ან არცერთი წახნაგი არ ექნება შეღებილი.

პასუხები:

1 ა) მოდა — 1060, მედიანა — 890, გაბნევის დიაპაზონი 1760, მონაცემთა საშუალო — 951; ბ) ≈479; გ) ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი:

ხელფასი	450	720	1060	2210
ფარდობითი სიხშირე	20%	30%	40%	10%

2 დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილი:

ინტერვალი	[0; 4)	[0; 8)	[0; 12)	[0; 16)	[0; 20]
დაგროვილი სიხშირე	5	5	12	31	40

3 ა) 5, ბ) 7,5. **4** $\frac{C_{23}^4}{C_{24}^5}$. **5** 0,28.

მითითებები:

1 მედიანა მე-10 და მე-11 მონაცემის საშუალოა, (720+1060):2; გაბნევის დიაპაზონი — უდიდესისა და უმცირესის სხვაობა. საშუალო კვდარატული გადახრის გამოსათვლელად შევადგინოთ ცხრილი:

ხელფასი x	450	720	1060	2210
თანამშრომლების რაოდენობა	4	6	8	2
$x - x_{საშ}$	–501	–231	109	1259
	251001	53361	11881	1585081

საშუალო კვადრატული გადახრა:

$$\sqrt{\frac{251001 \cdot 4 + 53361 \cdot 6 + 11881 \cdot 8 + 1585081 \cdot 2}{20}} = \sqrt{229469} \approx 479.$$

3 თუ მონაცემებს ზრდის მიხედვით დავალაგებთ, 14 ქულის მფლობელების ნომრები იქნება 6, 7, 8 და 9. ამ რიცხვების არითმეტიკული საშუალოა 14-ქულიანი კანდიდატებიდან თითოეულის რანგი.

(4) ხელშემწყობია შემთხვევები, სადაც ერთი ყველაზე წარჩინებულია, დანარჩენი 4 კი აირჩევა 23 მოსწავლეს შორის, მათი რაოდენობაა C_{23}^{4}.

(5) 3 წახნაგი შეღებილი აქვს 8 პატარა კუბს, რომლებიც თავდაპირველი კუბის წვეროებში იყო. 27 პატარა კუბი შეუღებავი წახნაგებითაა (დიდ კუბს თუ შემოვაცლით გარე ფენებს, დარჩება 3·3·3=27 პატარა კუბი). საძიებელი ხდომილობები არათავსებადია, ამიტომ $P=\frac{8}{125}+\frac{27}{125}$.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

(1) ა) მოდის, მედიანისა და გაბნევის დიაპაზონის პოვნა შეფასდეს ერთი ქულით, მონაცემთა საშუალოს პოვნა — კიდევ 1 ქულით;

ბ) დავალების შესრულება შეფასდეს 1 ქულით;

გ) დავალების შესრულება — 2 ქულით (1 ქულა ფარდობითი სიხშირეების გამოთვლისთვის, 1 ქულა — დიაგრამის აგებისთვის).

სულ — 5 ქულა.

(2) 1 ქულით შეფასდეს დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილის წარმოდგენა; კიდევ ერთი ქულით — დიაგრამის აგება. სულ — 2 ქულა.

(3) ა) და ბ) პუნქტებიდან თითოეულის შესრულება შეფასდეს თითო ქულით. სულ — 2 ქულა.

(4) ამ 2-ქულიანი ამოცანის ამოხსნა შევაფასოთ 1 ქულით, თუ ის მცირე ხარვეზითაა შესრულებული.

(5) ამოხსნა შეფასდეს 2 ქულით (საძიებელი არათავსებადი ხდომილობებიდან თითოეულის გამოთვლა თითო ქულით).

სულ 13 ქულაა, 10-ქულიანი შეფასებისთვის მოსწავლის შედეგი გავამრავლოთ $\frac{10}{13}$-ზე და შედეგი დავამრგვალოთ.

სტატისტიკის, კომბინატორიკისა და ალბათობის საკითხები, მათი აქტუალურობის გამო, საშუალო საფეხურზე განათლების მნიშვნელოვან კომპონენტს წარმოადგენს და მისი სწავლება მთელ აღნიშნულ პერიოდს გასდევს.

მე-6 თავის შემაჯამებელი წერა ამ ეტაპზე მოსწავლეთა ცოდნის განმსაზღვრელ შეფასებას წარმოგვიდგენს. ცოდნისა და სათანადო უნარების გაღრმავების მიზნით ეს შეფასება განმავითარებელი შეფასების ინსტრუმენტად უნდა გამოიყენოთ. ამ აქტივობით უთუოდ შენიშნავთ პროგრესს აღნიშნულ საკითხებში მოსწავლეთა მზაობის მხრივ. შედეგები მით უფრო მაღალი იქნება, რაც უფრო მეტად გაზრდით მოსწავლეთა შემოქმედებით ჩართულობას განმავითარებელ შეფასებაში.

გთავაზობთ ზოგიერთ რეკომენდაციას განმავითარებელი შეფასების მომზადებისა და ჩატარების ორგანიზებისთვის.

1 ამოცანის ა) დავალებაში მნიშვნელოვანია მონაცემის სიხშირის არსის ხაზგასმა — მოცემულია არა 4 მონაცემი, არამედ — 20. ეს არსებითია, როცა მონაცემთა საშუალოსა და მედიანას ვპოულობთ. არსებითია ხაზგასმა: მედიანის პოვნისას მონაცემთა ზრდის (ან კლების) მიხედვით განლაგება, მონაცემთა რაოდენობის ლუწ-კენტოვნების გათვალისწინება. აქვე შეიძლება მოვიყვანოთ მონაცემთა სხვა ერთობლიობები და მათთვის აღნიშნული რიცხვითი მახასიათებლების დადგენა. ყოველი საკითხი მოსწავლეთა აქტიური ჩართულობით უნდა იყოს განხილული.

ბ) დავალების განხილვისას თავდაპირველად მოსწავლეებმა უნდა გაიაზრონ რას ვპოულობთ სტანდარტული გადახრით, რამდენად მნიშვნელოვანია ეს მახასიათებელი გაფანტულობის ზომის დასადგენად და რით განსხვავდება ის გაბნევის დიაპაზონისგან. კლასმა უნდა აითვისოს (საჯარო განხილვის კვალობაზე) სტანდარტული გადახრის პოვნის ალგორითმი და მისი რეალიზაციის ეტაპები. სასურველია მონაცემთა სიხშირეების გამოყენებით სტანდარტული გადახრის ფორმულის კომპაქტური ფორმით ჩაწერა და გამოთვლა.

გ) დავალების განხილვისას თავდაპირველად კიდევ ერთხელ მიუბრუნდით სიხშირისა და ფარდობითი სიხშირეების ცნებებს. როგორ შევამოწმოთ, რომ გამოთვლები სწორადაა შესრულებული, რისი ტოლია ფარდობით სიხშირეთა ჯამი (წილადებში ან პროცენტებში წარმოდგენისას)? ამ დავალებაში სვეტოვანი დიაგრამის აგებისას გამართლებულია თუ არა ჰისტოგრამის გამოყენება?

2 ამოცანაში დაჯგუფებულ მონაცემთა კვლევა მიმდინარეობს. ჩვენი რეკომენდაციით სჯობს წინასწარ განიხილოთ რაიმე მონაცემთა სიხშირეების ცხრილი და შემდეგ წარმოადგინოთ ეს მონაცემები დაჯგუფებულ მონაცემებად. ამის შემდეგ უფრო იოლად ააგებთ დაჯგუფებულ მონაცემთა სიხშირეების დიაგრამას და დაგროვილ სიხშირეთა უწყვეტი განაწილების დიაგრამას. შეიძლება იმსჯელოთ ოგივას აგებაზეც, მონაცემთა დაჯგუფებაზე, მაგალითად, 8-ბიჯიანი დიაგრამით: [0; 8), [8, 16) და [16, 24] ინტერვალებად.

3 ამოცანის განხილვამდე წინასწარ ერთობლივად განიხილეთ მონაცემის რანგის დადგენის წესი (რომელშიც არსებითია განლაგება ზრდის მიხედვით და შემდეგ, ტოლი მონაცემების არსებობისას, მათი რანგის დადგენის წესი). განიხილეთ საილუსტრაციო ამოცანები და მოისმინეთ მოსწავლეთა მოსაზრებები ამ შემთხვევაში.

4 ამოცანის განხილვამდე კლასმა უნდა წარმოადგინოს ხდომილობის ალბათობის ფორმულა. ამოცანის განხილვისას კი უნდა გამოიკვეთოს სამი ეტაპი:

- რამდენი შესაძლებლობა არსებობს 24 მოსწავლეში 5 მოსწავლის შერჩევის?
- რა შემადგენლობის უნდა იყოს აღნიშნული ხუთეული? მასში ერთი აუცილებელი წევრია და ოთხი შესაძლო წევრი, რამდენი ასეთი ოთხეული შეიძლება მოიძებნოს?
- რა სახით წარმოგვიდგება საძიებელი ალბათობის ფორმულა?

5 ამოცანის განხილვისას სჯობს მოსწავლეებმა წარმოადგინონ დიდი შეღებილი დახერხილი კუბის სურათი და დასაბუთდეს, რა შემთხვევაში მიიღება 125 პატარა კუბი. მოსწავლეები ხალისით ჩაერთვებიან ამ აღწერაში და ერთმანეთს დაეხმარებიან რეალური სურათის წარმოდგენაში — რომელ კუბებს ექნება 1 ფერადი წახნაგი, რომელს — 2, რომელს — 3 და რომელი იქნება შეუღებავი წახნაგებით. ამ უკანასკნელთა მდებარეობას მივაგნებთ, თუ დიდი კუბის ზედაპირს შემოეცლება პატარა კუბების ერთი შრე. შედეგად მიიღება კუბი, რომლის თითოეული წიბოს გასწვრივ 3 პატარა კუბი განთავსდება. ამრიგად, ასეთი 27 პატარა კუბი იარსებებს, ხოლო საძიებელი კუბების საერთო რაოდენობაა 8+27=35.

განმავითარებელი შეფასების შემდგომ ჩაინიშნეთ დეტალურად ის ინფორმაცია, რაც მიიღეთ ამ შეფასებისას და გაითვალისწინეთ თქვენს სამომავლო სასწავლო გეგმებში.

გთავაზობთ მეექვსე თავის შემაჯამებელი წერისა და განმავითარებელი შეფასების მიხედვით მოსწავლეთა აკადემიური დონეების დადგენის სარეკომენდაციო ვერსიას, რომელიც სოლო ტაქსონომიის დონეების მიხედვით არის შედგენილი.

1. პრესტრუქტურული დონე. განხილული საკითხების მკაფიო საილუსტრაციო შესაძლებლობების არსებობის მიუხედავად, მოსწავლეს არ აქვს რამდენადმე მისაღები წარმოდგენა სამიზნე ცნებებზე, ვერ ახერხებს მონაწილეობას საკითხების განხილვაში, უჭირს ტექსტური ამოცანების არსის გადმოცემა.

2. უნისტრუქტურული დონე. მოსწავლე იცნობს მონაცემთა ერთობლიობის რიცხვითი მახასიათებლებიდან ზოგიერთს, შეუძლია მათი პოვნა, თუმცა მათი სიღრმისეული ცოდნისგან შორსაა და, შესაბამისად, უშვებს ხოლმე შეცდომებს; უჭირს კომბინატორული ამოცანების განხილვა, ვარიანტების რაოდენობის დათვლა, თუმცა იცის კომბინატორიკისა და ალბათობის ფორმულები.

3. მულტისტრუქტურული დონე. მოსწავლეს შეუძლია მარტივი სტატისტიკური და ალბათური ამოცანების ამოხსნა, ალბათობის „სტანდარტულ" ამოცანებში, საჭიროების შემთხვევაში, იყენებს კომბინატორიკის ფორმულებს. მკაფიოდ ვერ აყალიბებს სტანდარტული გადახრის არსს. ვერ პასუხობს კითხვას: შეიცვლება თუ არა სტანდარტული გადახრა ერთი რომელიმე მინაცემის ცვლილებისას?

4. მიმართებითი დონე. მოსწავლეს მკაფიო წარმოდგენა აქვს დასახელებულ სამიზნე ცნებებზე და მათ კვლევაზე, კარგად აგებს სათანადო დიაგრამებს. ყველა განხილული ამოცანა სწორად ამოხსნა. მისი მსჯელობა არის მკაფიო და დამაჯერებელი.

5. გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. მოსწავლის პასუხებში იგრძნობა შემოქმედებითი დამოკიდებულება განსახილველი საკითხებისადმი. დასმულ ამოცანებზე პასუხს ახლავს ხოლმე შესაძლო განზოგადებები და მათი ამოხსნის გზები. ნაშრომში და განხილვისას ფაქტობრივად წარმოდგენილია კვლევა არა მხოლოდ დასმული ამოცანების. საჯარო განხილვებში მისი ჩართულობა გამოირჩევა აზრის სიღრმითა და სიმწყობრით.

ლიტერატურა

1. ა. ბენდუქიძე. მათემატიკა, სერიოზული და სახალისო, თბილისი, 1988.

2. თ. გეგელია. მათემატიკის სპეციალური კურსი, თბილისი, განათლება, 1985.

3. თ. გეგელია. სასკოლო მათემატიკის ფუნდამენტური ცნებები. თბილისი, 1985.

4. გ.გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე. მათემატიკის სწავლების რეფორმა და მისაღები გამოცდები. ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში, 1977, 4.

5. ლ. გოკიელი. მათემატიკის საფუძვლები, თბილისი, 1958.

6. თ. ვეფხვაძე. მათემატიკის რჩეული თავები. I ნაწ., თბილისი, 1997.

7. ე. იმერლიშვილი. სასკოლო მათემატიკის განვითარების ისტორია, თბილისი, 1988.

8. რ. კურანტი, ჰ. რობინსონი. რა არის მათემატიკა. თარგმანი რუსული გამოცემიდან, თბილისი, 1961.

9. ჰ. მელაძე, ნ. სხირტლაძე. გამოყენებითი მათემატიკის საწყისები, თბილისი, 2000.

10. ეროვნული სასწავლო პროგრამა. საგნობრივი პროგრამა მათემატიკაში. პროექტი, 2005.

11. შ. ფხაკაძე. განტოლებათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი, თბილისი, 1974.

12. ფ. ხარშილაძე. მათემატიკის სასკოლო კურსის თანამედროვე საფუძვლები, თბილისი, 1981.

13. Н. Бурбаки. Очерки по истории математики, Москва, 1963.

14. Б.В. Гнеденко. Статистическое мышление и школьное математическое образование, Математика в школе, 1968, №1.

15. Диофант, Арифметика, Москва, 1975.

16. В.А. Добровольский. Даламбер. «Знание», Москва, 1968.

17. Евклид. Начала. Москва, 1950.

18. М. Клайн. Математика. Поиск истины. Москва, 1988.

19. Ф. Клайн. Элементарная математика с точки зрения высшей, т. 1, т. 2, 1972.

20. А.Н. Колмогоров. Математика – наука и профессия, Москва, 1968.

21. Ю.А. Макаренков, А.А. Столяр. Что такое алгоритм, Минск, 1989.

22. Математика в понятиях, определениях и терминах, т. 1, 2. Москва, 1978.

23. Математическая энциклопедия (в пяти томах). Москва, 1975.

24. Методика преподавания математики в средней школе, Москва, 1977.

25. На путях обновления школьного курса математики. Сборник статей, Москва, 1978.

26. С.М. Никольский и др. Арифметика, Москва, 1988.

27. Ж. Пиаже и др. Преподавание математики, пер. с франц. Москва, 1960.

28. Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения, пер. с англ., Москва, 1975.

29. Д. Пойа. Как решить задачу. Перев. с анг., Москва, 1963.

30. Д. Пойа. Математическое открытие, Пер. с англ., Москва, 1976.

31. Д. Пидоу. Геометрия и искусство, Москва, 1960.

32. А.В. Погорелов. Геометрия 7–11. Москва, 1990.

33. А. Пуанкаре. О науке, Москва, 1963.

34. В. Серве. Аксиоматика и элементарная геометрия. Мат. в школе, №6, 1967.

35. Франсуа–Мари Жерар, Ксавье Рожье. Разработка и анализ школьных учебников. При участии Кристиан Боснан и др., Москва, 1993.

36. Г. Фройденталь. Математика в науке и вокруг нас. Москва, 1977.

37. Г. Фройденталь. Математика как педагогическая задача, Москва, ч. 1. 1982, ч. II, 1983.

38. А. Фуше. Педагогика математики, Москва, 1969.

39. И.Ф. Шарыгин. Геометрия 7–9, Москва, 1998.

40. И.М. Яглом. О школьном курсе геометрии, Математика в школе, №2, 1968, 53–58.

41. Н.Я. Виленкин, К.И. Дунаичев, Л.А. Калутнин, А.А. Столяр. Современные основы школьного курса математики, Москва, 1980;

42. Н.Я. Виленкин, К.И. Дунаичев, Л.А. Калутнин, А.А. Столяр. Методика преподавания математики в средней школе. Москва, 1977;

43. Преподавание алгебры в 6–8 классах. Сборник статей, Москва, 1980.

44. M.R. Schroder. Number Theory in Science and Communication – New York: Springer, 1984;

45. K. Rosen, Elemntary Number Theory and its Applications, Reading (Mass.). Addision Wesley, 1984

46. H. Riesel. Prime Numbers and Computer Methods for Factorisation, Boston; Burkhaser, 1987

47. Houghton Miffin Mathematics, Miffin Company, Boston, 1987

48. Mathematics Unlimited, Printed in the United States of America, 1988

49. Middle Grades, Mathematics an Interactive Awpproach, Printed in the USA, 1995

50. Larson, Hostetler. Precalculus, Printed in the Unites States of America, 1996.

დამატებითი ბეჭდური და ელექტრონული რესურსები

სასწავლო პროცესში დიდ დახმარებას გაგიწევთ ბეჭდური და ელექტრონული რესურსები. განსაკუთრებული მნიშვნელობა შეიძინა ამ რესურსებმა დისტანციური სწავლებისას:

1. ტელესკოლა-1TV.

2. *www.silkschool.ge*. „საშინაო სკოლა", გაკვეთილები, მათემატიკა.

3. როგორ ვასწავლოთ მოსწავლეებს აზროვნება, მეთოდოლოგიური სახელმძღვანელო, თბილისი, 2007.

4. გიორგი ნოზაძე, მოსწავლეთა საჭიროებანი და მიზნები მათემატიკის სწავლის დროს, 13 მარტი, 2017 წელი, *www.maswavlebeli.ge*.

5. რობერტ ჯ. მარზანო, დებრა ჯ. ფიქერინგი, ჯეინ ი. ფოლოქი, ეფექტური სწავლება სკოლაში. მასწავლებელთა პროფესიული განვითარების ცენტრი, 2009.

6. ეკატერინე კორძაძე, „მათემატიკური წიგნიერება", სამოქალაქო განვითარების ინსტიტუტი, თბილისი, 2012.

7. ტერმინოლოგიური ლექსიკონი, *www.ncp.ge* (ეროვნული სასწავლო გეგმების პორტალი).

8. „მათემატიკა", სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტი მათემატიკაში.

9. ინტერნეტრესურსი: *Geogebra.org.*

10. *https://www.youtube.com/playlist?list=PLZAJN80qYfiJ4uPrcdg8NKCZ-eJhx-ulv&fbclid=IwAR2yUsK8aFZtPTRoeyCTlcNuKkmHjUXYPdRagmHnzdeLOAoy8gADFqqjtjE.*

11. *https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standarts/Positions,-Standards-and-Expectations/ (National Council of Teachers of Mathmatics)*

12. *Develping Pedagogic Skills for the Use of the Interactive Whiteboard in Mathematics [PDF].*

13. ინტერნეტრესურსი: *Desmos.com.*